

УДК 624.072.21/23

**Ткачук В.С.**  
к.т.н., доцент  
**Девін В.В.**  
к.т.н., доцент

кафедра фізико-математичних та загальнотехнічних  
дисциплін Інженерно технічний факультет  
Подільський аграрно-технічний університет  
Кам'янець-Подільський, Україна  
**E-mail:** [twsk@i.ua](mailto:twsk@i.ua)  
**E-mail:** [dvvkr@rambler.ru](mailto:dvvkr@rambler.ru)

## РОЗРАХУНОК МОНТАЖНИХ НАПРУЖЕНЬ В ШАРНІРНО-СТЕРЖНЬОВИХ СИСТЕМАХ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Якщо монтаж металевої конструкції відбувається в реальних умовах, то неможливо забезпечити оптимальні розміри посадок елементів системи. При умові статичної невизначеності такої системи в елементах конструкції з'являються напруження навіть без прикладання зовнішніх навантажень – так звані монтажні напруження. Для шарнірно-стержневих систем (ферми, підвіски) поява таких напружень пояснюється властивістю матеріалу елемента конструкції (стержня), неточністю виготовлення і монтажу, зміною розмірів при нагріві чи охолодженні, і наявністю в'язей стержня у вузлах з іншими елементами. Слід відмітити, що при проектуванні статично невизначених конструкцій практично неможливо отримати в усіх елементах напруження, що дорівнюють чи хоча б близькі до допустимих напружень, тобто деяка частина елементів шарнірно-стержневих систем буде знаходитись в недостатньо навантаженому стані.

Запропоновано застосування методу кінцевих елементів для розрахунку напружень, що виникають при монтажі статично невизначених шарнірно-стержневих систем довільної конфігурації. Використовується оригінальна авторська програма для формування матриці жорсткості системи й дослідження напружено-деформованого стану. Розглянуто алгоритм розв'язку задачі, приведені приклади розв'язку задач аналітичним і машинним способами.

Якщо шарнірно-стержнева система несе на собі зовнішні навантаження і працює в межах пружності матеріалу її елементів, то монтажні напруження слід алгебраїчно додавати до напружень, що виникають в процесі навантаження конструкції; це ж стосується і деформацій системи.

**Ключові слова:** монтажні напруження, метод скінчених елементів, матриця жорсткості, напружено-деформований стан.

**Вступ.** Якщо при монтажі статично невизначеної шарнірно-стержневої системи (ШСС) розміри деяких її елементів будуть дещо відрізнятися від проектних, то для збирання такої системи необхідно прикласти деякі зусилля, що викличе деформації стержнів. Це означає, що після монтажу в елементах ШСС виникнуть початкові напруження, які так і називають – монтажні. Подібне спостерігається при умові статичної невизначеності системи, і при значному степені такої невизначеності призводить до складних розрахунків при використанні класичного методу сил. При експлуатації ферма, як шарнірно-стержнева система, несе на собі зовнішні навантаження, які умовно зводяться до вузлових. Тоді, використовуючи принцип суперпозиції, напруження від монтажу додають до напружень, що виникають при навантаженнях, а також до можливих температурних напружень. При цьому неточності при виготовленні стержнів ферм рахуються малими порівняно з довжинами стержнів, тому при розгляданні

фізичного боку задачі враховуються їх проектні розміри (а не фактичні).

**Аналіз попередніх досліджень та публікацій.** При проектуванні складних статично невизначних конструкцій повинна враховуватись неможливість досягнення в усіх її елементах напружень, близьких до допустимих напружень; частина елементів шарнірно-стержневих систем знаходиться в недонапруженому стані. Теоретичні розрахунки ведуться в передбаченні роботи матеріалу всіх елементів системи в пружній зоні. Відмітимо, що при монтажі статично визначних шарнірно-стержневих конструкцій таких початкових напружень не виникає, бо збирання таких систем можна здійснити вільно, без прикладання певних зусиль.

Ідея методу кінцевих елементів (МКЕ) базується на розгляданні рівноваги всієї системи, розбитої на окремі елементи. В застосуванні МКЕ до ферм такими елементами є стержні, з'єднані в вузлах, в яких можуть бути прикладені навантаження і переміщення яких приймаються за невідомі. Така ідея існувала і раніше, але реалізація її стала можливою тільки при появі сучасних обчислювальних засобів, з їх швидкодією та практично необмеженим об'ємом пам'яті. Центральною частиною розв'язання задач МКЕ є формування «матриці жорсткості» розглядуваної системи, що залежить від її геометрії та жорсткості окремих її елементів; для складних ШСС порядок такої матриці може досягати сотень і навіть тисяч [1, 2, 3].

Далі зауважимо, що якщо ШСС, яка несе на собі зовнішні навантаження, працює в межах пружності, то, виходячи з принципу суперпозиції, монтажні напруження алгебраїчно додають до напружень, що виникають від навантаження конструкції. При цьому в деяких елементах ШСС сумарні напруження можуть зменшуватися, в деяких – збільшуватися; це треба враховувати при конструюванні систем.

В даній роботі застосовано метод кінцевих елементів (МКЕ) для розв'язання вказаного типу „монтажних” задач [1, 2, 4, 5]. Метод широко розвинувся в інженерній практиці за останні десятиріччя і розрахований на розв'язання реальних задач з застосуванням ПК. Авторами складена програма для розрахунку ферм з довільною геометрією при будь-яких способах їх закріплення і довільному „дефектному” векторі.

Сформувавши матрицю жорсткості всієї розглядуваної системи й знайшовши невідомі, за які прийняті переміщення вузлів ШСС, одержуємо можливість дослідити повністю напружено-деформований стан (НДС) конструкції [6,7].

**Мета** статті – розробити методіку для розрахунку ферм будь-якої конфігурації з прямолінійними елементами; закріплення ферми може бути довільним; таким же довільним може бути вектор осадок при умові малості переміщень опорних вузлів порівняно з позовжніми розмірами елементів ШСС.

### Методологія.

#### 1. Аналітичний розв'язок.

**Постановка задачі.** Задана схема статично невизначної ШСС, в якій  $m$  вузлів з'єднують  $n$  стержнів. Статична невизначність може бути як зовнішньою, так і внутрішньою [3, 8]; підхід до розв'язку при цьому лишається єдиним.

Відомі довжини стержнів  $l_i$  ферми, кути їх нахилу до осі  $x$ , площі перерізів  $F_i$ , модулі пружності  $E_i$  матеріалу стержнів; при цьому передбачається постійність жорсткостей стержнів по довжині:  $E_i F_i = const$ . Схема закріплена в вузлах за допомогою  $k$  стержнів. І на кінець, в загальному випадку відомий „дефектний” вектор відхилення довжин стержнів від проектних значень. Ставиться задача визначити зусилля  $N_i$  напруження  $\sigma_i$  в їх перерізах, подовження  $\Delta l_i$  стержнів.

**Розкриття статичної невизначності.**

Для плоскої ферми степінь статичної невизначності

$$S = n + k - 2 \cdot m \quad (a)$$

Викладемо хід розв'язку задачі з застосуванням методу сил.

а) Вибираємо основну систему, відкидаючи  $S$  зайвих стержнів й вводячи невідомі зусилля  $X_i$  в напрямку цих стержнів.

б) Зображаємо  $S$  одиничних станів, прикладаючи по напрямку вказаних стержнів одиничні сили  $\bar{X}_i = 1$ , і визначаємо зусилля  $\bar{N}_{ij}$  в цих станах; при цьому використовуємо відомі методи розрахунку статично визначних ШСС. Обчислення зручно оформляти в табличному вигляді.

в) Обчислюємо коефіцієнти  $\delta_{ij}$  та вільні члени  $\Delta_{id}$  канонічних рівнянь методу сил по формулах

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum \bar{N}_i \cdot \bar{N}_j \cdot G_i, \quad (1)$$

$$\Delta_{id} = \sum \bar{N}_i \cdot d_i, \quad (2)$$

$$\text{де } G_i = l_i / E_i \cdot F_i. \quad (3)$$

г) Складаємо канонічну систему методу сил

$$\sum \delta_{ij} \cdot X_j + \Delta_{id} = 0; \quad i, j = \overline{1, s}, \quad (4)$$

розв'язуючи, знаходимо невідомі зусилля  $X_i$ ; статична невизначність розкрита.

**Дослідження НДС системи.**

Зусилля в стержнях обчислюємо за формулою

$$N_i = \sum_{i=1}^s X_i \cdot \bar{N}_i \quad (5)$$

Опорні реакції обчислюємо за формулою

$$R = \sum X_i \cdot \bar{R}_i, \quad (6)$$

де  $\bar{R}_i$  були визначені в одиничних станах.

Напруження в перерізах стержнів визначаємо по формулі

$$\sigma_i = N_i / F_i \quad (7)$$

Подовження стержнів визначаємо по формулі

$$\Delta l_i = d_i + N_i \cdot G_i \quad (8)$$

**Приклад.****Розв'язок**

1) **Геометрія системи.** Нумеруємо вузли й стержні в кружечках. Довжини стержнів:  $l_1 = \sqrt{5^2 + 6^2} = 7,810$  м;  $l_2 = \sqrt{3^2 + 8^2} = 8,544$  м. і т.д.

Кути нахилу стержнів до осі  $X$ :  $\cos \beta_1 = 5 / 7,81 = 0,6402$ ;

$\sin \beta_1 = 6 / 7,81 = 0,7682$ ;  $\beta_1 = 50,2^\circ$  і т.д.

Дані обчислень заносимо в таблицю 1; там же приведені й дані по умові задачі: модулі пружності  $E_i$  матеріалу стержнів, площі їх перерізів  $F_i$ , відхилення довжини

стержнів  $\delta_i$  від потрібних розмірів („дефекти” стержнів).

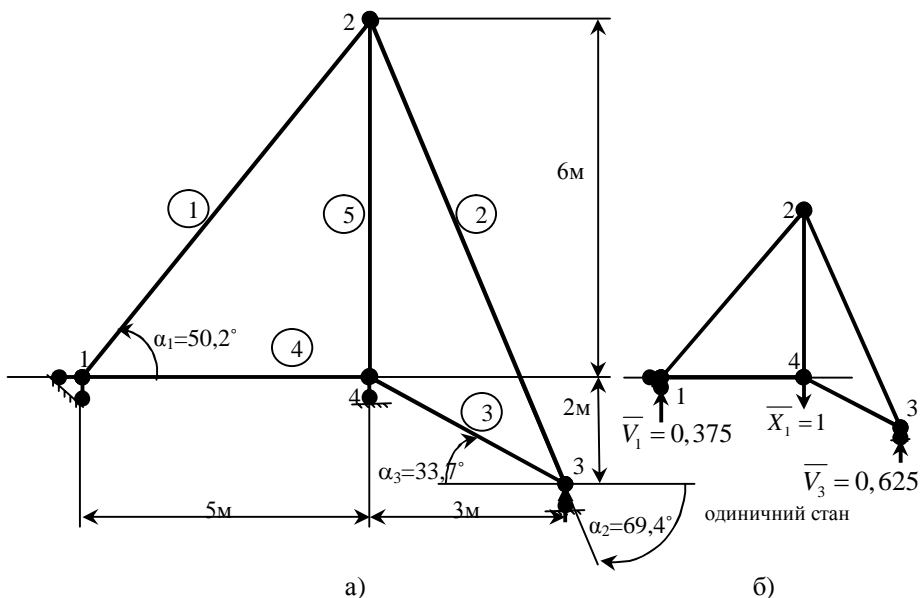


Рис. 1. Геометрія системи

2) Розкриття статичної невизначності. (метод сил)

Степінь статичної невизначності системи  $k = n + z - 2 \cdot m$ ,

де  $n = 5$  – число стержнів,  $z = 4$  – число опорних стержнів,  $m = 4$  – число вузлів. В нашому випадку  $k = 5 + 4 - 2 \cdot 4 = 1$ .

Таблиця 1

Геометрія системи

Стержні	$E \cdot 10^{-4}$ кН / см <sup>2</sup>	$F$ см <sup>2</sup>	$d$ см	$l$ м	$\cos \beta$	$\sin \beta$	$\beta$ град
1	2	10	-0,1	7,810	0,6402	0,7682	50,2
2	0,7	8	0	8,544	0,3511	-0,9363	-69,44
3	1	15	0,15	3,606	-0,8319	0,5548	33,70
4	1,2	20	-0,3	5	1	0	0
5	0,9	12	0,2	6	0	-1	-90

\*Складено авторами на підставі розрахунків схеми

Обчислюємо  $G_i$  по формулі  $G_i = (l / E \cdot F)_i$ .

$G_1 = 7,81 / (2 \cdot 10) = 39,05$ ;  $G_2 = 8,544 / (0,7 \cdot 8) = 152,57$  і т.д.

Дані заносимо в таблицю 2.

Таблиця 2

## Вихідні розрахункові дані\*

Стержні	$G \cdot 10^4$ см/кН	$d$ см	$\bar{N}$	$\bar{N}^2 \cdot G \cdot 10^4$ см/кН	$\bar{N} \cdot \delta$	$N$ кН	$\sigma$ кН/см <sup>2</sup>	$\Delta l$ см
1	39,05	-0,1	-0,4882	9,307	0,0488	5,701	0,570	-0,0777
2	152,57	0	-0,8902	120,902	0	10,395	1,299	0,1586
3	24,04	0,15	0,3757	3,393	0,0564	-4,387	-0,292	0,1394
4	20,83	-0,3	0,3125	2,034	-0,0938	-3,649	-0,183	-0,3076
5	55,56	0,2	1,2083	81,117	0,2417	-14,109	-1,176	0,1215
$\Sigma$				216,75	0,2531			

\*Складено авторами на підставі розрахунків схеми

а) Одиничний стан. Відкидаємо опорний стержень в вузлі 4, по його напрямку прикладаємо силу  $\bar{X}_1 = 1$ . Визначаємо опорні реакції (Рис. 16)

$$\sum \bar{M}_1 = 1 \cdot 5 - \bar{V}_3 \cdot 8 = 0; \quad \bar{V}_3 = 0,625;$$

$$\sum \bar{M}_3 = \bar{V}_1 \cdot 8 - 1 \cdot 3 = 0; \quad \bar{V}_1 = 0,375; \quad \sum \bar{X} = \bar{H}_1 = 0.$$

Вирізаємо послідовно вузли ШСС й знаходимо зусилля  $\bar{N}_i$  (рис. 2).

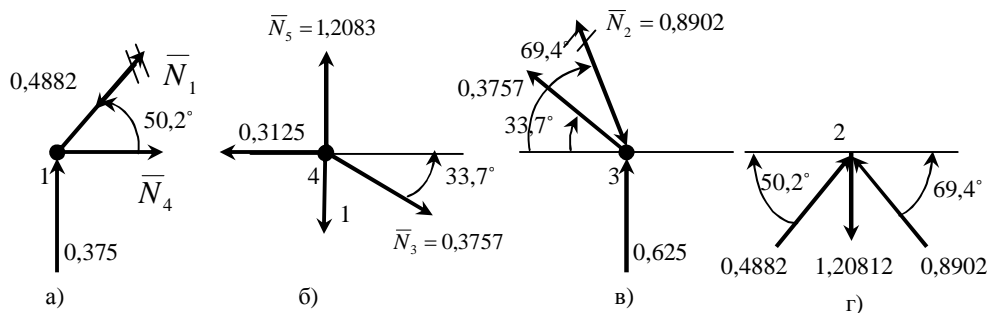


Рис. 2. Схеми зусиль в опорних вузлах та вузлі 2

б) Коефіцієнти канонічного рівняння.

$$\delta_{11} = \sum (N^2 \cdot G)_i; \quad \Delta_{1d} = \sum (\bar{N} \cdot d)_i$$

$$\bar{N}_1^2 \cdot G_1 = 9,307; \quad \bar{N}_1 \cdot d_1 = 0,4882 \quad \text{і т.д.}$$

В останньому рядку таблиці 2 одержуємо значення  $\delta_{11}, \Delta_{1d}$ .

в) Канонічне рівняння.

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1d} = 0$$

$$216,75 \cdot 10^{-4} \cdot X_1 + 0,2534 = 0; \quad X_1 = -11,77 \text{ кН}$$

Статична невизначність розкрита.

3) Подальші розрахунки.а) Зусилля в стержнях

$$N_i = \sum X_i \cdot \overline{N}_j$$

В нашому випадку:  $N_i = X_1 \cdot \overline{N}_i$

$$N_1 = -11,77 \cdot (-0,4882) = 5,701 \text{ кН}$$

$$N_2 = -11,77 \cdot (-0,8902) = 10,395 \text{ кН і т.д.}$$

б) Напруження в стержнях

$$\sigma_i = N_i / F_i$$

$$\sigma_1 = 5,701 / 10 = 0,5701 \text{ кН/см}^2 \text{ і т.д.}$$

в) Подовження стержнів

$$\Delta l_i = d_i + (N \cdot G)_i$$

$$\Delta l_1 = -0,1 + 39,05 \cdot 10^{-4} \cdot 5,701 = -0,0777 \text{ см і т.д.}$$

2. Машинний розв'язок.Метод кінцевих елементів в застосуванні до шарнірно-стержневої системи

**(ШСС).** Розглядаємо ферму як сукупність  $n$  елементів – стержнів, з'єднано в  $m$  вузлах. Очевидно при монтажі такої системи в випадку її статичної невизначності в перерізах стержнів виникають тільки поздовжні сили  $N_i = const$  (внутрішні зусилля), тобто маємо однорідний напружений стан в межах кожного кінцевого елемента.

Формуємо три групи рівнянь: статичні, геометричні і фізичні. За невідомі приймаємо переміщення вузлів, тоді задача зводиться до побудови матриці жорсткості (МЖ) розглядуваної системи й її подальшому обертанню для одержання матриці податливості.

$$\Delta l = (U_i - V_j) \cos \alpha + (U_i - V_j) \sin \alpha \quad (9)$$

а) Статичний бік задачі. Вирізаємо  $i$ -й вузол й складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{j=1}^r N_j \cdot \cos \alpha_j + P_{x_i} = 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^r N_j \cdot \sin \alpha_j + P_{y_i} = 0, \quad (10)$$

де  $r$  – кількість стержнів, що сходяться в даному вузлі. Такі рівняння запишемо для всіх  $m$  вузлів.

б) Геометричний бік задачі. Позначимо через  $U, V$  проекції переміщень вузлів  $i, j$ , які з'єднує даний стержень (рис. 3). Після деформації вузли змістились в положення  $i', j'$ . Подовження стержня  $\Delta l = AB + BC$ , тобто

$$\Delta l = (U_i - U_j) \cdot \cos \alpha + (V_i - V_j) \cdot \sin \alpha \quad (11)$$

в) Фізичний бік задачі. Враховуючи можливий дефект стержня на величину  $d$  й розглядаючи роботу системи в межах пружності, маємо для подовження стержня

$$\Delta l = d + N \cdot G, \quad (12)$$

де жорсткість стержня  $G$  задається формулою (3).

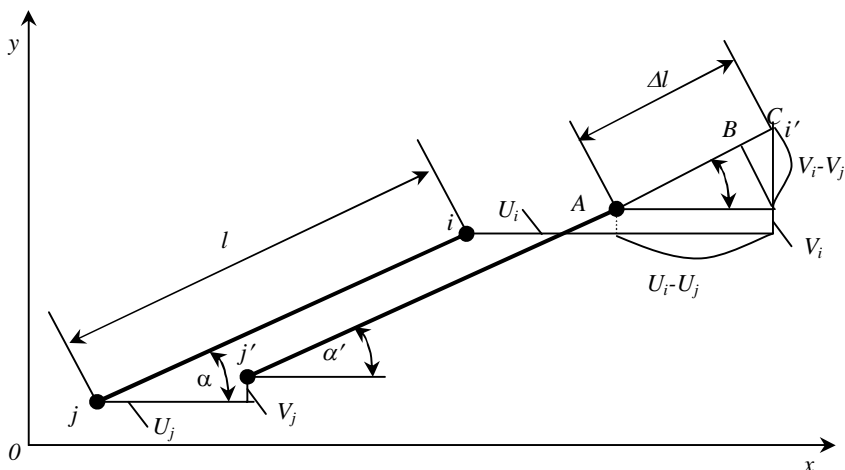


Рис. 3. Схема переміщення вузлів

з) *Синтез.* Порівнюючи вирази (10) і (11), будемо мати для зусилля в стержні

$$N_{ij} = [(U_i - U_j) \cdot \cos \alpha + (V_i - V_j) \sin \alpha - d] / G \quad (13)$$

Підставимо (12) в (9) й після збирання членів з  $U_i, V_i, U_s, V_s, \dots, U_t, V_t$  ( $s, \dots, t$  – номери вузлів, суміжних з вузлом  $i$ ), при  $i = \overline{1, m}$  будемо мати систему  $2 \cdot m$  лінійних рівнянь відносно переміщень  $U, V$ . Запишемо її в матричному вигляді

$$\overline{R} \cdot \overline{U} = \overline{P} \quad (14)$$

де  $\overline{R}$  – матриця жорсткості для всієї ШСС,  $\overline{U}$  – вектор шуканих переміщень,  $\overline{P}_1$  – вектор дефектів стержнів. Матриця  $\overline{R}$  має блочний вигляд й є симетричною відносно головної діагоналі [8]. Елементи вектора  $\overline{P}_1$  одержуємо за формулами

$$P_{1_{2i-1}} = \sum (d \cdot \cos \alpha / G)_j; \quad P_{1_{2i}} = \sum (d \cdot \sin \alpha / G)_j \quad (15)$$

При наявності  $Z$  опорних стержнів з матриці  $\overline{R}$  вилучаємо відповідні рядки й стовбці й одержуємо стиснуту МЖ  $\overline{Z}_1$ , аналогічно з вектора  $\overline{P}_1$  одержуємо стиснутий вектор  $\overline{P}_2$ . Розв'язок системи має вигляд

$$\overline{U}_1 = \overline{Z}_1^{-1} \cdot \overline{P}_2 \quad (16)$$

де  $\overline{Z}_1^{-1}$  – матриця податливості ШСС,  $\overline{U}_1$  – вектор ненульових переміщень вузлів ферми. Далі, використовуючи формули (12), (13), знаходимо подовження стержнів і зусилля в стержнях.

**Результати.** Розроблено оригінальний методологію підходу до розрахунку шарнірно-стержньових систем з урахуванням монтажних напружень. Детально вони розглянуті в роботі [3, 7, 10], де приводиться узагальнена схема алгоритму і окремо схема формування матриці жорсткості. Програма складена на алгоритмічній мові, її використання дає повний аналіз НДС системи.

**Приклад.** Умова приведена вище при аналітичному розв'язку задачі (рис.1). Для

зручності всі дані зберемо в таблиці.

Таблиця 3

**Координати вузлів\***

Вузли	1	2	3	4
$x, м$	0	5	8	5
$y, м$	0	6	-2	0

\*Складено авторами на підставі даних схеми

В таблиці 4 вектори  $\vec{a}, \vec{b}$  – структурні вектори. Вектор закріплення  $\vec{c} = (1, 2, 6, 8)$ .

Таблиця 4

**Геометрія стержнів і структурних векторів**

Стержні	1	2	3	4	5
$a$	1	2	3	1	2
$b$	2	3	4	4	4
$E \cdot 10^{-4}$	2	0,7	1	1,2	0,9
$F$	10	8	15	20	12
$d$	-0,1	0	0,15	-0,3	0,2

\*Складено авторами на підставі даних схеми

Розв'язок задачі:

**Умова задачі**

Координати вузлів

0,000	5,000	8,000	5,000
0,000	6,000	-2,000	0,000

Структурні вектори

1	2	3	1	2
2	3	4	4	4

Модулі пружності

2,00E4	0,70E4	1,00E4	1,20E4	0,90E4
--------	--------	--------	--------	--------

Площі перерізів

10,00	8,00	15,00	20,00	12,00
-------	------	-------	-------	-------

Вектор закріплення

1	2	6	8
---	---	---	---

Дефекти стержнів

-0,10	0,00	0,15	-0,30	0,20
-------	------	------	-------	------

**Результати розв'язку**

Опорні реакції

-0,0000	-4,3794	-7,2990	11,6784
---------	---------	---------	---------



Зусилля в стержнях	-5,7007	-10,3938	4,3861	3,6495	14,1114
Переміщення вузлів	0,0000	-0,2674	-0,1400	-0,3076	
	0,0000	0,1216	0,0000	0,0000	
Подовження стержнів	-0,0777	0,1586	0,1395	-0,3076	0,1216
Напруження в стержнях	-0,5701	-1,2992	0,2924	0,1825	1,1759

**Висновки.** Пропоноване використання методу дозволяє вести повний розрахунок статично невизначних шарнірно-стержньових систем з урахуванням монтажних напружень. Програма на алгоритмічній мові включає повне дослідження напружено-деформованого стану. Метод може бути узагальнений і на випадок просторових стержневих систем.

#### Список використаних джерел

1. Снитко, Н.К. Строительная механика [Текст] / Н.К. Снитко. – М.: Высшая школа, 1972.– 488с.
2. Дарков, А.В. Строительная механика [Текст] / Под редакцией А.В. Даркова. – М.: Высшая школа, 1976. – 600 с.
3. Журбин, О.В. Анализ инженерных конструкций методом конечных элементов [Текст] : учеб. пособие / О.В. Журбин, С.Д. Чижиумов. – Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО«КнАГТУ», 2004. – 157 с.
4. Писаренко, Г.С. Соппротивление материалов [Текст] / Г.С. Писаренко. - 5-е изд. перераб. и доп. К.: Вища школа. Головное издательство, 1979. – 696с.
5. Беляев, Н.М. Соппротивление материалов [Текст] / Н.М. Беляев. – М.: Головное издательство, 1954. – 856с.
6. Феодосьев, В.И. Соппротивление материалов [Текст] / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1970. – 544с.
7. Галлагер, Р. Метод конечных элементов, основы [Текст] / Р. Галлагер. Пер. с англ. В.М. Картвешвили; Под ред. Н.В. Баничука. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
8. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич ; пер. с англ.; под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошных сред [Текст] / О. Зенкевич, И. Чанг. ; пер. с англ. О.П. Троицкого и С.В. Соловьева; под ред. Ю.К.Зарецкого. – М.: Недра, 1974. – 239 с.
10. Васильева, В.Н. Введение в теорию метода конечных элементов [Текст] / В.Н. Васильева. – Иркутск, Изд-во Иркут. ун-та, 1986. – 149 с.

#### References

1. Snytko N.K. (1972). *Stroytel'naia mekhanika* [Structural mechanics]. Moscow.: Vysshiaia shkola [in Russian].
2. Darkov, A.V. (Edit.) (1976). *Stroytel'naia mekhanika* [Structural mechanics]. Moscow : Vysshiaia shkola [in Russian].
3. Zhurbyn, O.V. (2004). *Analyz ynzhenernykh konstruksiy metodom konechnykh elementov* [Analysis of engineering structures using finite element method]. Komsomol'sk-na-Amure: HOUVPO«КнАГТУ».
4. Pysarenko, H.S. (1979). *Soprotivlenye materyalov* [Strength of materials]. Kyiv : Vyscha

shkola. Holovnoe yzdatel'stvo.

5. Beliaev, N.M. (1954). *Soprotivlenye materyallov* [Strength of materials]. Moscow: Holovnoe yzdatel'stvo.

6. Feodos'ev, V.Y. (1970). *Soprotivlenye materyalov* [Strength of materials]. Moscow : Nauka [in Russian].

7. Hallaher, R., & Banychuk, N.V. (Edit.). (1984). *Metod konechnykh elementov, osnovy* [The finite element method, the basics]. (V.M. Kartveshvyly, Trans). Moscow : Myr [in Russian].

8. Zenkevych, O., & Pobedry, B.E. (Edit.). (1975). *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [The finite element method in the art]. Moscow : Myr [in Russian].

9. Zenkevych, O., Chanh Y., Zaretskiy Yu.K. (Eds.). (1974). *Metod konechnykh elementov v teoryi sooruzheniy u mekhanike sploshnykh sred* [The finite element method in the theory of structures and continuum mechanics]. (Troytskiy, O.P., Solov'ev, S.V., Trans.). Moscow : Nedra [in Russian].

10. Vasylyeva, V.N. (1986). *Vvedeniye v teoryiu metoda konechnykh elementov* [Introduction to the theory of finite element method]. Yrkutsk, Yzd-vo Yrkut. un-ta [in Russian].

*Дата надходження статті до редакції : 16.02.16*

*1 рецензування : 29.02.2016, прийняття в друк : 6.03.2016*

*Received : 16.02.16. 1 revision : 29.02.2016. Accepted : 16.02.16*

**Vasiliy Tkachuk**

*PhD (Eng.), Associate  
Professor*

**Vladlen Devin**

*PhD (Eng.)  
Associate Professor*

*Department of Agricultural machines*

*Engineering Faculty*

*State Agrarian and Engineering University in Podilya*

*Kamenets-Podilsky, Ukraine*

*E-mail: [dvvvp@rambler.ru](mailto:dvvvp@rambler.ru)*

*E-mail: [tws@i.ua](mailto:tws@i.ua)*

## THE CALCULATION OF MOUNTING STRESSES IN THE HINGE-ROD SYSTEM USING THE METHOD OF FINAL ELEMENT

*The paper shows that it is impossible to provide the optimal size of landing system components when the installation of metal structures is organized in real conditions. In terms of redundancy of the system design elements so-called mounting tension appears. The presence of such strains is due to the material properties of the element (the rod), manufacturing inaccuracies, resizing of heating or cooling, and the links in the nodes of another element. In the process of applying the finite element method to calculate the stresses generated during the installation of a statically indeterminate hinged-rod systems of any configuration was used by the original authors of the program for the formation of stiffness matrix of the system and study of stress-strain state. An algorithm for solving analytical and machine methods were applied.*

**Key words:** *mounting stress, finite element method, matrix stiffness, the stress-strain state.*

**Василий Ткачук**

*к.т.н., доцент*

**Владлен Девин**

*к.т.н., доцент*

*кафедра физико-математических и общетехнических*

*дисциплин Инженерно-технический факультет*

*Подольский аграрно-технический университет*

*Каменец-Подольский, Украина*

*E-mail: [tws@i.ua](mailto:tws@i.ua)*

*E-mail: [dvvvp@rambler.ru](mailto:dvvvp@rambler.ru)*

## РАСЧЕТ МОНТАЖНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Если установка металлических конструкций происходит в реальных условиях, невозможно обеспечить оптимальный размер посадок элементов системы. В условиях статической неопределенности такой системы в элементах конструкции появляются напряжения даже без приложения внешних нагрузок, так называемые монтажные напряжения. Для шарнирно-стержневых систем (фермы, подвеска) появление таких напряжений объясняется свойствами материала элемента (стержня), неточности изготовления, изменение размера от нагрева или охлаждения, и наличие связей в узлах другого элемента. При проектировании статически неопределенных конструкций практически невозможно получить все элементы напряжений, равные или по крайней мере близкие к допустимым напряжениям, т.е. некоторые из элементов шарнирно-стержневых систем будут находиться в недостаточно напряженном состоянии. При применении метода конечных элементов для расчета напряжений, возникающих при монтаже статически неопределенных шарнирно-стержневых систем любой конфигурации, используется оригинальная программа авторов для формирования матрицы жесткости системы и исследования напряженно-деформированного состояния. Рассматривается алгоритм решения задач аналитическим и машинным способами. Если шарнирно-стержневая система нагружена и работает в пределах упругости, то монтажные напряжения необходимо алгебраически суммировать с напряжениями, возникающими при нагрузке конструкции, то же самое относится и к деформации системы.

**Ключевые слова:** монтажные напряжения, метод конечных элементов, матрицы жесткости, напряженно-деформированное состояние.