

**УДК 624.078****Девін В.В.***к.т.н., доцент**кафедра фізико-математичних і загальнотехнічних дисциплін**Подільський державний аграрно-технічний університет**Кам'янець-Подільський, Україна**E-mail : dvvkr@rambler.ru***Ткачук В.С.***к.т.н., доцент**кафедра фізико-математичних і загальнотехнічних дисциплін**Подільський державний аграрно-технічний університет**Кам'янець-Подільський, Україна**E-mail : twskm@mail.ru*

## **РОЗРАХУНОК ПРОСТОРОВИХ ФЕРМ ВІД ДІЇ ЗОВНІШНІХ НАВАНТАЖЕНЬ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

### ***Анотація***

*При розгляданні реальних задач будівельної механіки стикаються з труднощами аналітичного та обчислювального характеру навіть при розгляданні малоелементних плоских шарнірно-стержневих систем (ферми, підвіски і т. ін.). Якщо розглядаються просторові шарнірно-стержневі системи (ШСС), то збільшення кількості елементів таких конструкцій приводить до громіздких обчислень, не говорячи про статично невизначні задачі. Якщо шарнірно-стержнева система несе на собі зовнішні навантаження і працює в межах пружності матеріалу її елементів, то монтажні напруження слід алгебраїчно додавати до напружень, що виникають в процесі навантаження конструкції; це ж стосується і деформацій системи.*

*Розглянуті просторові шарнірно-стержневі системи, в яких виникає напружено-деформований стан із-за прикладання вузлових навантажень. Із застосуванням методу кінцевих елементів розв'язується задача по дослідженню НДС системи при її довільній геометрії. Для формування матриці жорсткості складена оригінальна програма на алгоритмічній мові, що включає повне дослідження не залежно від ступені статичної невизначності ферми. Приведені приклади розв'язку конкретних задач методом сил і машинним методом.*

***Ключові слова:*** *метод кінцевих елементів, матриця жорсткості, просторова ферма.*

**Вступ.** При розгляданні реальних задач будівельної механіки стикаються з труднощами аналітичного та обчислювального характеру навіть при розгляданні малоелементних плоских шарнірно-стержневих систем (ферми, підвіски і т. ін.). Якщо розглядаються просторові шарнірно-стержневі системи (ШСС), то збільшення кількості елементів таких конструкцій приводить до громіздких обчислень, не говорячи про статично невизначні задачі. Крім того, застосовуючи відомі методи визначення зусиль в стержнях ферм, неодмінно одержуємо похибки в обчисленнях.

Таким чином, давно існувала потреба в застосуванні таких методів, які б дозволили систематизувати розрахунки в будівельній механіці незалежно від геометрії систем, способів закріплення, ступені статичної невизначності. З появою потужних обчислювальних засобів - електронних обчислювальних машин (ЕОМ) – такий метод з'явився, хоча ідея його реалізації існувала і раніше. Таким методом є метод скінчених елементів (МСЕ), в якому розглядається рівновага не окремих частин системи, а її рівновага в цілому; це дозволяє створити так звану матрицю жорсткості системи з заданою геометрією.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** При проектуванні складних статично невизначених конструкцій повинна враховуватись неможливість досягнення в усіх її елементах напружень, близьких до допустимих напружень; частина елементів шарнірно-стержневих систем знаходиться в недонапруженому стані. Теоретичні розрахунки ведуться в передбаченні роботи матеріалу всіх елементів системи в пружній зоні. Відмітимо, що при монтажі статично визначених просторових шарнірно-стержневих конструкцій таких початкових напружень не виникає, бо збирання таких систем можна здійснити вільно, без прикладання певних зусиль.

Ідея методу кінцевих елементів (МКЕ) базується на розгляданні рівноваги всієї системи, розбитої на окремі елементи. В застосуванні МКЕ до ферм такими елементами є стержні, з'єднані в вузлах, в яких можуть бути прикладені навантаження і переміщення яких приймаються за невідомі. Така ідея існувала і раніше, але реалізація її стала можливою тільки при появі сучасних обчислювальних засобів, з їх швидкодією та практично необмеженим об'ємом пам'яті. Центральною частиною розв'язання задач МКЕ є формування «матриці жорсткості» розглядуваної системи, що залежить від її геометрії та жорсткості окремих її елементів; для складних ШСС порядок такої матриці може досягати сотень і навіть тисяч [1, 2, 3].

Далі зауважимо, що якщо просторова ШСС, яка несе на собі зовнішні навантаження, працює в межах пружності, то, виходячи з принципу суперпозиції, монтажні напруження алгебраїчно додають до напружень, що виникають від навантаження конструкції. При цьому в деяких елементах ШСС сумарні напруження можуть зменшуватися, в деяких – збільшуватися; це треба враховувати при конструюванні систем.

В даній роботі застосовано метод кінцевих елементів (МКЕ) для розв'язання вказаного типу „просторових” задач [1, 2, 4, 5]. Метод широко розвинувся в інженерній практиці за останні десятиріччя і розрахований на розв'язання реальних задач з застосуванням ПК. Авторами складена програма для розрахунку ферм з довільною геометрією при будь-яких способах їх закріплення і довільному „дефектному” векторі.

Сформувавши матрицю жорсткості всієї розглядуваної системи й знайшовши невідомі, за які прийняті переміщення вузлів ШСС, одержуємо можливість дослідити повністю напружено-деформований стан (НДС) просторової конструкції [6, 7].

Авторами складена програма для розрахунку просторових ферм довільної конфігурації при будь-яких способах закріплення й довільних навантаженнях. В розробці приведені основні аналітичні залежності й відповідно до них описані алгоритми розв'язку окремих частин задачі по повному дослідженню напружено-деформованого стану (НДС) шарнірно-стержневої системи; викладена методика розрахунку таких систем та розглянуті приклади розрахунків як аналітичним так і машинним способами.

**Мета** статті – запропонувати і розробити методику для розрахунку просторових ферм будь-якої конфігурації з прямолінійними елементами; закріплення ферми може бути довільним; таким же довільним може бути вектор осадок при умові малості переміщень опорних вузлів порівняно з поздовжніми розмірами елементів ШСС.

#### **Методологія дослідження.**

##### **1. Аналітичний розв'язок**

*Постановка задачі.* Просторові ферми – це шарнірно-стержневі системи (ШСС), елементи яких розташовані в різних площинах; навантаження, які сприймаються фермами, теж діють в різних площинах. На відміну від плоских ферм стержні просторових ферм з'єднані не циліндричними, а кульовими шарнірами, які забезпечують поворот кінців стержнів відносно трьох взаємно перпендикулярних осей. Навантаження на ферму вважаються вузловими, тому всі елементи просторової ШСС працюють тільки

на розтяг та стиск [3, 8].

Вибираємо довільну координатну систему  $Oxyz$  і в ній розглядаємо геометрію системи; вважаємо відомими довжини  $l$  елементів ферми й кути їх нахилу до координатних осей. Відомі модулі пружності  $E$  матеріалів стержнів й площі їх поперечних перерізів  $F$ ; по довжині жорсткості стержнів приймаємо постійними

$$EI = \text{const}$$

Припускається також, що досліджувана ШСС запроектована так, щоб напруження в  $n$  її елементах не перевищували допустимих значень. Система зв'язана з землею (фундаментом) за допомогою  $k$  опорних стержнів в вузлах; навантаження  $P$ , як уже вказувалось, прикладені в вузлах.

### Статично визначні задачі.

Для кожного шарнірного вузла можна скласти три рівняння проєкцій діючих сил, тобто для всієї ШСС таких рівнянь можна скласти  $3m$ . Степінь статичної невизначності в такому разі складає

$$s = n + k - 3m. \quad (1)$$

При  $s > 0$  система  $s$  раз статично невизначна; при  $s = 0$  система статично визначна, і, на кінець, при  $s < 0$  система геометрично змінна. Тут розглядаємо випадок  $s = 0$ .

Для знаходження зусиль  $N$  в стержнях ШСС застосовують відомі способи. Для подальшого розуміння розглядуваного в роботі методу скінчених елементів особливу увагу слід уділити методу вирізання вузлів.

Опорні реакції ферми визначають, використовуючи рівняння рівноваги у вигляді:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0, \quad (3)$$

На рис. 1.1 в загальному випадку показано стержні  $ij$ ,  $ik$ ,  $ir$ , що виходять з вузла  $i$ , й зусилля  $N_{ij}$ ,  $N_{ik}$ ,  $N_{ir}$  в них;  $P_{xi}$ ,  $P_{yi}$ ,  $P_{zi}$  – проєкції зусилля  $P_i$ , прикладеного в розглядуваному вузлі; очевидно в опорних вузлах це будуть відповідні опорні реакції. На рисунку показані кути нахилу до координатних осей тільки стержня  $ij$ , при цьому рівняння рівноваги (1.2) запишуться у вигляді:

$$\sum_{j=1}^r N_j \cos \alpha_j + P_{xi} = 0; \quad \sum N_j \cos \beta_j + P_{yi} = 0; \quad \sum N_j \cos \gamma_j + P_{zi} = 0, \quad (4)$$

де  $r$  – кількість стержнів, що сходяться в вузлі  $i$ .

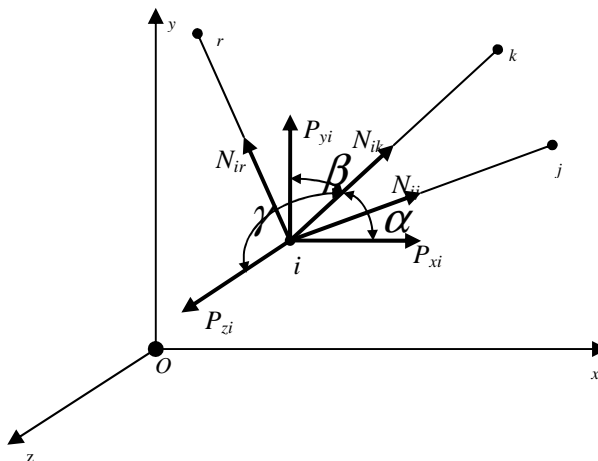


Рис. 1. Рівновага вузла ШСС

Подовження стержнів знаходяться із відомого фізичного співвідношення  
 $\Delta l = Nl / EF;$  (5)

напруження в перерізах стержня  
 $\sigma = N / F;$  (6)

### Приклад 1.

Нумеруємо вузли й стержні (в кружечках);  $m=5$ ;  $n=9$ ;  $k=6$ . Перевіряємо умову (1) при  $s=0$ :  $9+6-3\cdot 5=15-15=0$ , тобто ферма є статично визначною.

Для визначення опорних реакцій складаємо рівняння рівноваги (2), (3):

$$\sum X = -X_1 + 7 = 0; X_1 = 7 \text{ кН}; \sum Y = Y_1 + Y_3 + 5 - 20 = 0; Y_1 + Y_3 = 15;$$

$$\sum Z = Z_1 + Z_3 - Z_4 - 12 = 0; Z_1 + Z_3 - Z_4 = 12;$$

$$\sum M_x = -Z_3 \cdot 1,5 + Z_4 \cdot 2 + 5 \cdot 2,5 = 0; 1,5Z_3 - 2Z_4 = 12,5;$$

$$\sum M_y = -Z_3 \cdot 1,5 = 0; Z_3 = 0; Z_4 = -6,25 \text{ кН}; Z_1 = 12 - 6,25 = 5,75 \text{ кН};$$

$$\sum M_z = -20 \cdot 2,2 - 7 \cdot 1,5 + Y_3 \cdot 2,2 = 0; Y_3 = 24,77 \text{ кН}; Y_1 = 15 - 24,77 = -9,77 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum M_{2,3} = -12 \cdot 2,2 + 5,75 \cdot 2,2 + 6,25 \cdot 2,2 = -26,4 + 26,4 \equiv 0.$$

Починаючи з вузла 1, обходимо вузли шарнірно-стержневої системи в наступному порядку: 1, 2, 3, 4. Дані приводимо тільки по вузлам 1, 4.

Вузол 1.  $N_1 = 7 \text{ кН}$ ;  $N_2 = 9,77 \text{ кН}$ ;  $N_3 = -5,77 \text{ кН}$ .

Вузол 4 (рис. 4, г).

$$\sum Y = -9,77 - N_9 \cos \beta_9 + 9,46 \cos \beta_5 - 7,17 \cos \beta_7 = 0; N_9 = -8,005 \text{ кН}.$$

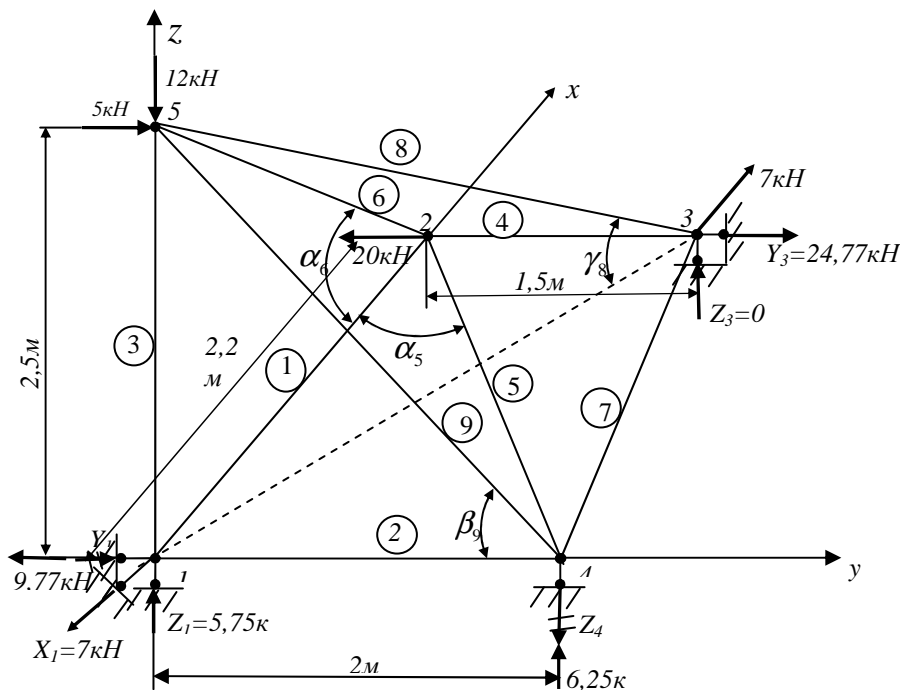


Рис. 2. Статично визначна просторова ферма

Розглянемо геометрію системи. Довжини стержнів  
 $l_5 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,973\text{м}; l_6 = \sqrt{2,2^2 + 2,5^2} = 3,330\text{м}$  і т. д. Направляючі косинуси стержнів:  
 $\cos \alpha_5 = 2,2 / 2,973 = 0,740; \alpha_5 = 42,27^0;$

$\cos \beta_5 = 2 / 2,973 = 0,673; \beta_5 = 47,73^0; \cos \gamma_5 = 0; \gamma_5 = 90^0$  і т. д.

Дані обчислень приведені в таблиці 1. Там попередньо приводяться також значення модулів пружності матеріалу  $E$  й площі поперечних перерізів стержнів  $F$ , задані по умові задачі.

Напруження в перерізах стержнів за формулою (6):

$\sigma_1 = 7 / 10 = 0,7\text{кН} / \text{см}^2; \sigma_2 = 9,77 / 14 = 0,698\text{кН} / \text{см}^2$  і т. д.

Подовження стержнів за формулою(1.5):

$\Delta l_1 = 7 \cdot 220 / 1 \cdot 10^4 \cdot 10 = 0,0154\text{см}; \Delta l_2 = 9,77 \cdot 200 / 1,2 \cdot 10^4 \cdot 14 = 0,0116\text{см}$  і т. д.

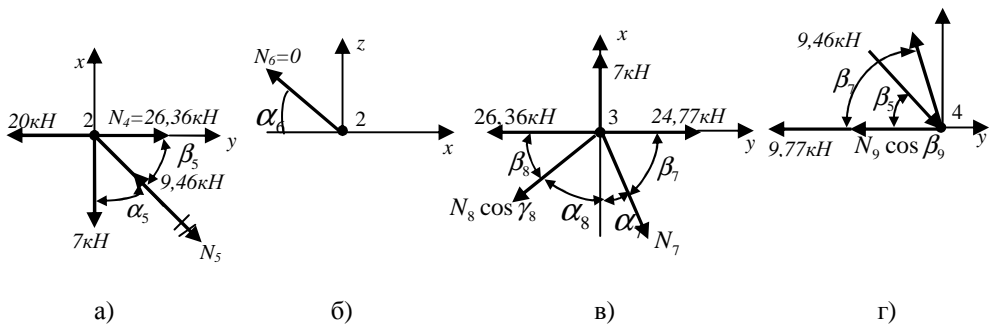


Рис. 3. Рівновага вузлів. Приклад 1

Таблиця 1

#### Геометрія системи

| Стержні | $E 10^4$<br>кН/см <sup>2</sup> | $F$<br>см <sup>2</sup> | $l$<br>м | $\alpha$<br>град | $\beta$<br>град | $\gamma$<br>град | $\cos \alpha$ | $\cos \beta$ | $\cos \gamma$ | $N$<br>кН | $\sigma$<br>кН/см <sup>2</sup> | $\Delta l$<br>см |
|---------|--------------------------------|------------------------|----------|------------------|-----------------|------------------|---------------|--------------|---------------|-----------|--------------------------------|------------------|
| 1       | 1                              | 10                     | 2,2      | 0                | 90              | 90               | 1             | 0            | 0             | 7,00      | 0,700                          | 0,0154           |
| 2       | 1,2                            | 14                     | 2        | 90               | 0               | 90               | 0             | 1            | 0             | 9,77      | 0,698                          | 0,0116           |
| 3       | 0,8                            | 20                     | 2,5      | 90               | 90              | 0                | 0             | 0            | 1             | -5,75     | -0,288                         | 0,0090           |
| 4       | 1,5                            | 24                     | 1,5      | 90               | 0               | 90               | 0             | 1            | 0             | 26,36     | 1,099                          | 0,0110           |
| 5       | 1                              | 8                      | 2,973    | 42,27            | 47,73           | 90               | 0,740         | 0,673        | 0             | -9,46     | -1,183                         | 0,0352           |
| 6       | 2                              | 16                     | 3,330    | 48,65            | 90              | 41,35            | 0,661         | 0            | 0,751         | 0         | 0                              | 0                |
| 7       | 0,9                            | 10                     | 2,256    | 12,80            | 77,20           | 90               | 0,975         | 0,222        | 0             | 7,17      | 0,718                          | 0,0180           |
| 8       | 1,4                            | 30                     | 3,653    | 52,97            | 65,73           | 46,81            | 0,602         | 0,411        | 0,684         | 0         | 0                              | 0                |
| 9       | 1,8                            | 22                     | 3,202    | 90               | 51,35           | 38,65            | 0             | 0,625        | 0,781         | -8,00     | -0,364                         | 0,0065           |

\* Складено авторами на підставі розрахунків схеми

#### Статично невизначні задачі

Розрізняють два види статично невизначних ШСС – зовнішньо і внутрішньо статично невизначні.

Розглянемо зовнішньо статично невизначну просторову ферму.

“Зайвими” з точки зору статика є опорні стержні в кількості  $s$ . Для розв’язку задачі застосуємо метод сил:

а) вибираємо основну систему, відкидаючи зайві опорні стержні й вводячи по їх напрямку відповідні опорні реакції  $X_i$ , які приймаємо за невідомі;

б) визначаємо зусилля в стержнях  $N_p$  в вантажному стані, який являє собою статично визначну ферму;

в) зображаючи одиничні стани, прикладаємо по напрямку відкинутих опорних стержнів одиничні сили  $\overline{X}_i=1$  й визначаємо зусилля в стержнях  $\overline{N}_{ij}$  в цих одиничних станах;

г) обчислюємо коефіцієнти канонічних рівнянь методу сил за формулами:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_{i=1}^r \frac{\overline{N}_i \overline{N}_j l_i}{E_i F_i}; \Delta_{ip} = \sum \frac{N_p \overline{N}_i l_i}{E_i F_i}, \quad (7)$$

або, вводячи величину, обернену жорсткості

$$G_i = l_i / E_i F_i, \quad (8)$$

це можна записати:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum \overline{N}_i \overline{N}_j G_i; \Delta_{ip} = \sum N_p \overline{N}_i G_i. \quad (9)$$

д) складаємо канонічну систему

$$\sum_{j=1}^s \delta_{ij} X_j + \Delta_{ip} = 0; (i = \overline{1, s}), \quad (10)$$

Розв'язуємо її й знаходимо невідомі опорні реакції; таким чином статична невизначність буде розкрита;

е) обчислюємо зусилля в стержнях і опорні реакції ШСС за формулами

$$N_i = N_{pi} + \sum_{j=1}^s X_j \overline{N}_{ij}; \quad R_i = R_{pi} + \sum \overline{R}_j X_j. \quad (11)$$

### Приклад 2.

Схема ШСС відповідає рис. 2, але в вузлі 2 в напрямку осі z поставлено ще опорний стержень. Геометрія ферми аналогічна Прикладу 1, тому необхідні дані будемо брати з таблиці 1.

Перевіримо умову (1). При  $m=5; n=9; k=7$  маємо  $s=9+7-3 \cdot 5=1$ , тобто система один раз статично невизначна. Обчислимо наперед податливості стержнів за формулою (8):

$$G_1 = 220/1 \cdot 10 \cdot 10^4 = 22 \cdot 10^{-4}; G_2 = 200/1,2 \cdot 10^4 \cdot 14 = 11,9 \cdot 10^{-4} \text{ і т. д.}$$

Вибираємо основну систему, відкинувши вказаний вище стержень в вузлі 2. Очевидно основна система має вигляд, приведений на рис. 3, тільки без навантажень; фактично там зображено вантажний стан. Зусилля  $N_p$  в ньому вже визначені (таблиця 1, стовпець  $N$ ).

Канонічна система методу сил в нашому випадку приймає вигляд одного рівняння:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$129,56 X_1 + 676,55 = 0; X_1 = -5,222 \text{ кН.}$$

Таким чином статична невизначність розкрита.

За формулами (11) обчислюємо зусилля в стержнях і останні опорні реакції:

$$N_1 = 7 - 5,222 \cdot 0 = 7 \text{ кН}; N_2 = 9,77 - 5,222 \cdot 0 = 9,77 \text{ кН}; N_3 = -5,75 + 5,222 \cdot 0,75 = -1,831 \text{ кН}$$

і т. д.

$$R_{1x} = 7 - 5,222 \cdot 0 = 7 \text{ кН}; R_{1z} = -5,75 + 5,222 \cdot 0,75 = -1,83 \text{ кН і т. д.}$$

За формулою (1.5), яку з врахуванням (1.8) можна записати

$$\Delta l_i = N_i G_i,$$

визначаємо подовження стержнів:

$$\Delta l_1 = 7 \cdot 22/10^4 = 0,0154 \text{ см}; \Delta l_2 = 9,77 \cdot 11,9/10^4 = 0,0116 \text{ см і т. д.}$$

За формулою (6) обчислюємо напруження в перерізах стержнів:

$$\sigma_1 = 7/10 = 0,7 \text{кН/см}^2; \sigma_2 = 9,77/14 = 0,698 \text{кН/см}^2 \text{ і т. д.}$$

## **2. Машинний розв'язок**

***Розробка алгоритму розв'язку задачі. Ідея методу скінчених елементів (МСЕ).***

Досліджувана конструкція розбивається на окремі елементи простої конфігурації, напружено-деформований стан (НДС) яких досліджується попередньо. Виконують спряження таких елементів, виходячи з умов рівноваги та нерозривності вузлових переміщень.

Як і в теорії пружності формулюються три групи рівнянь:

- статичні (рівновага конструкції);
- геометричні (зв'язок між переміщеннями і деформаціями);
- фізичні (зв'язок між зусиллями і деформаціями).

Центральною частиною розв'язку задачі є побудова так званої матриці жорсткості системи; в даній розробці запропоновано спрощений підхід при формуванні такої матриці, який не потребує зайвих дій над матрицями і значно скорочує машинний час розв'язку задачі.

### **Реалізація МСЕ для шарнірно-стержневої системи**

Шарнірно-стержневу систему (ШСС) розглядаємо як сукупність  $m$  вузлів і  $n$  стержнів. Вважаємо, що навантаження  $P_i$  прикладені тільки в вузлах ферми, тоді по довжині стержнів осові зусилля  $N_i = \text{const}$ , тобто в елементах ШСС наявний однорідний напружений стан.

Вибираємо довільну просторову систему координат, навантаження розкладаємо на проєкції  $P_{xi}, P_{yi}, P_{zi}$ .

***Статичний бік задачі.*** Вирізавши вузол  $i$  (рис. 4), складаємо рівняння рівноваги виду (4). Для зручності користування перепишемо ці рівняння

$$\sum_{j=1}^r N_j \cos \alpha_j + P_{xi} = 0; \sum N_j \cos \beta_j + P_{yi} = 0; \sum N_j \cos \gamma_j + P_{zi} = 0. \quad (12)$$

Тут  $r$  – кількість стержнів, що сходяться в  $i$ -му вузлі. В число  $P_i$  входять і невідомі опорні реакції. Такі рівняння записуються для всіх  $m$  вузлів ферми.

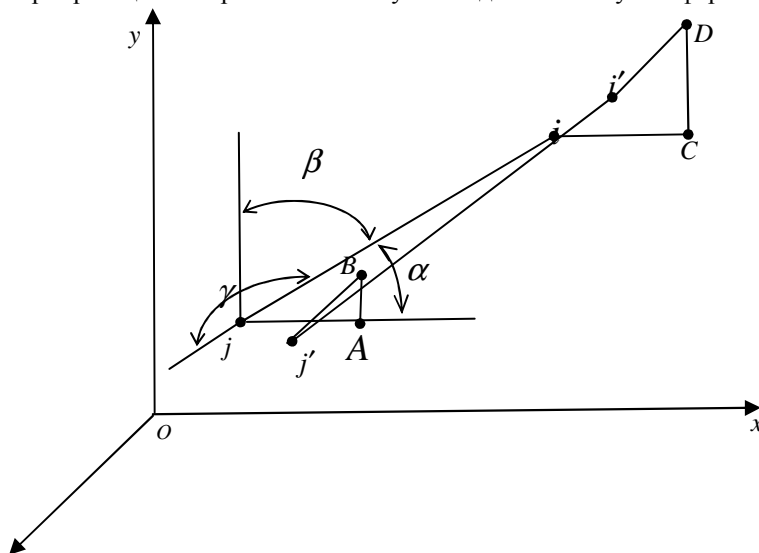


Рис. 4. Переміщення вузлових точок

Геометричний бік задачі. Після деформації вузли ШСС лишаються нероз'єднаними, це складає та звану умову нерозривності. Позначимо проекції переміщень вузлів через  $u, v, w$ .

На рис. 4 показані переміщення вузлових точок стержня  $ij; i'j'$  -- положення стержня після деформації. Проекції переміщень вузла  $i$ :  $iC = u_i$ ;  $CD = v_i$ ;  $Di' = w_i$ ; вузла  $j$ :  $jA = u_j$ ;  $AB = v_j$ ;  $Bj' = w_j$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  -- кути нахилу стержня до координатних напрямків.

На рис. 4 окремо показано зв'язок між переміщеннями  $u_i, u_j$  та подовженням стержня  $\Delta l$ .

В зв'язку з малістю деформацій вважаємо, що нахил стержня  $ij$  не змінився, тобто  $\angle \alpha' \approx \angle \alpha$ . Так як  $FC = u_i - u_j$ , то з трикутника  $FCE$  маємо для подовження стержня  $\Delta l$ :  $\Delta l = (u_i - u_j) \cos \alpha$ .

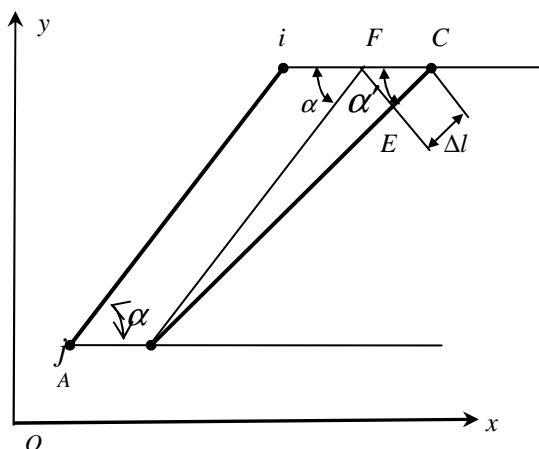


Рис. 5. Зв'язок між переміщеннями та деформацією

Розглянувши аналогічні зв'язки в напрямках  $y$  та  $z$ , кінцево маємо

$$\Delta l = (u_i - u_j) \cos \alpha + (v_i - v_j) \cos \beta + (w_i - w_j) \cos \gamma. \quad (13)$$

Фізичний бік задачі. При роботі матеріалу стержнів ферми в межах пружності маємо для подовження стержня

$$\Delta l = N \cdot G, \quad (14)$$

де позначена обернена жорсткість стержня

$$G = l / EF. \quad (15)$$

Синтез. Порівняємо вирази (13) й (14), тоді для зусилля в стержні маємо:

$$N = [(u_i - u_j) \cos \alpha + (v_i - v_j) \cos \beta + (w_i - w_j) \cos \gamma] / G. \quad (16)$$

Підставимо (16) в (12) й зберемо подібні члени з  $u_i, v_i, w_i, u_s, v_s, w_s, \dots, u_t, v_t, w_t$  ( $s, \dots, t$  – номери всіх вузлів, суміжних з  $i$ -м вузлом):



$$\begin{aligned}
& u_i \sum_r (\cos^2 \alpha_j / G_j) + v_i \sum_r (\cos \alpha_j \cos \beta_j / G_j) + w_i \sum_r (\cos \alpha_j \cos \gamma_j / G_j) - \\
& - u_s \cos^2 \alpha_s / G_s - v_s \cos \alpha_s \cos \beta_s / G_s - w_s \cos \alpha_s \cos \gamma_s / G_s - \\
& - \dots - u_t \cos^2 \alpha_t / G_t - v_t \cos \alpha_t \cos \beta_t / G_t - w_t \cos \alpha_t \cos \gamma_t / G_t + P_{xi} = 0; \\
& u_i \sum_r (\cos \alpha_j \cos \beta_j / G_j) + v_i \sum_r (\cos^2 \beta_j / G_j) + w_i \sum_r (\cos \beta_j \cos \gamma_j / G_j) - \\
& - u_s \cos \alpha_s \cos \beta_s / G_s - v_s \cos^2 \beta_s / G_s - w_s \cos \beta_s \cos \gamma_s / G_s - \\
& - \dots - u_t \cos \alpha_t \cos \gamma_t / G_t - v_t \cos^2 \beta_t / G_t - w_t \cos \beta_t \cos \gamma_t / G_t + P_{yi} = 0; \\
& u_i \sum_r (\cos \beta_j \cos \gamma_j / G_j) + v_i \sum_r (\cos \beta_j \cos \gamma_j / G_j) + w_i \sum_r (\cos^2 \gamma_j / G_j) - \\
& - u_s \cos \alpha_s \cos \gamma_s / G_s - v_s \cos \beta_s \cos \gamma_s / G_s - w_s \cos^2 \gamma_s / G_s - \\
& - \dots - u_t \cos \alpha_t \cos \gamma_t / G_t - v_t \cos \beta_t \cos \gamma_t / G_t - w_t \cos^2 \gamma_t / G_t + P_{zi} = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Записавши такі рівняння для  $m$  вузлів ШСС, маємо систему  $3m$  лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими переміщеннями  $u_i, v_i, w_i$ . Запишемо систему в матричному вигляді

$$\overline{R}\overline{U} = \overline{P}, \tag{18}$$

де  $R$  – матриця системи, яка фізично означає матрицю жорсткості всієї ферми,  $\overline{U}$  – вектор невідомих переміщень,  $\overline{P}$  – вектор вузлових навантажень.

Побічні блоки  $3 \times 3$  матриці мають вигляд:

$$-\begin{pmatrix} C_1 & D_1 & D_2 \\ D_1 & C_2 & D_3 \\ D_2 & D_3 & C_3 \end{pmatrix} = -(1/G) \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \beta \cos \alpha & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \gamma \cos \alpha & \cos \gamma \cos \beta & \cos^2 \gamma \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Діагональні блоки  $3 \times 3$  матриці мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} \sum C_{1j} & \sum D_{1j} & \sum D_{2j} \\ \sum D_{1j} & \sum C_{2j} & \sum D_{3j} \\ \sum D_{2j} & \sum D_{3j} & \sum C_{3j} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

тобто блоки, в свою чергу, є симетричними матрицями  $3 \times 3$ .

Матриця  $R$  складається для всієї шарнірно-стержневої системи з заданою геометрією і використовуватися безпосередньо для розв'язку задачі не може, так як в вектор  $\overline{P}$ , крім заданих вузлових навантажень, входять невідомі опорні реакції. Так як ці реакції діють по напрямку опорних стержнів, то відповідні вузлові переміщення є нульовими. При наявності  $k$  опорних стержнів матрицю  $R$  “стискаємо”, вилучаючи з неї відповідні рядки й стовпці.

$$\text{Одержуємо систему } Z_1 \overline{U} = \overline{P}_2, \tag{21}$$

де  $\overline{U}_1$  – “стиснутий” вектор  $\overline{U}$  (тобто без нульових переміщень),  $\overline{P}_2$  – “стиснутий” вектор  $\overline{P}$  (без опорних реакцій). Матричне рівняння (2.10) розв'язуємо за формулою

$$\overline{U}_1 = Z_1^{-1} \overline{P}_2 = B_1 \overline{P}_2, \tag{22}$$

де  $B_1 = Z_1^{-1}$  – обернена матриця до матриці  $Z_1$  (матриця податливості ШСС). Таким чином, розв'язана головна частина задачі – визначені переміщення  $u, v, w$  вузлів ферми.

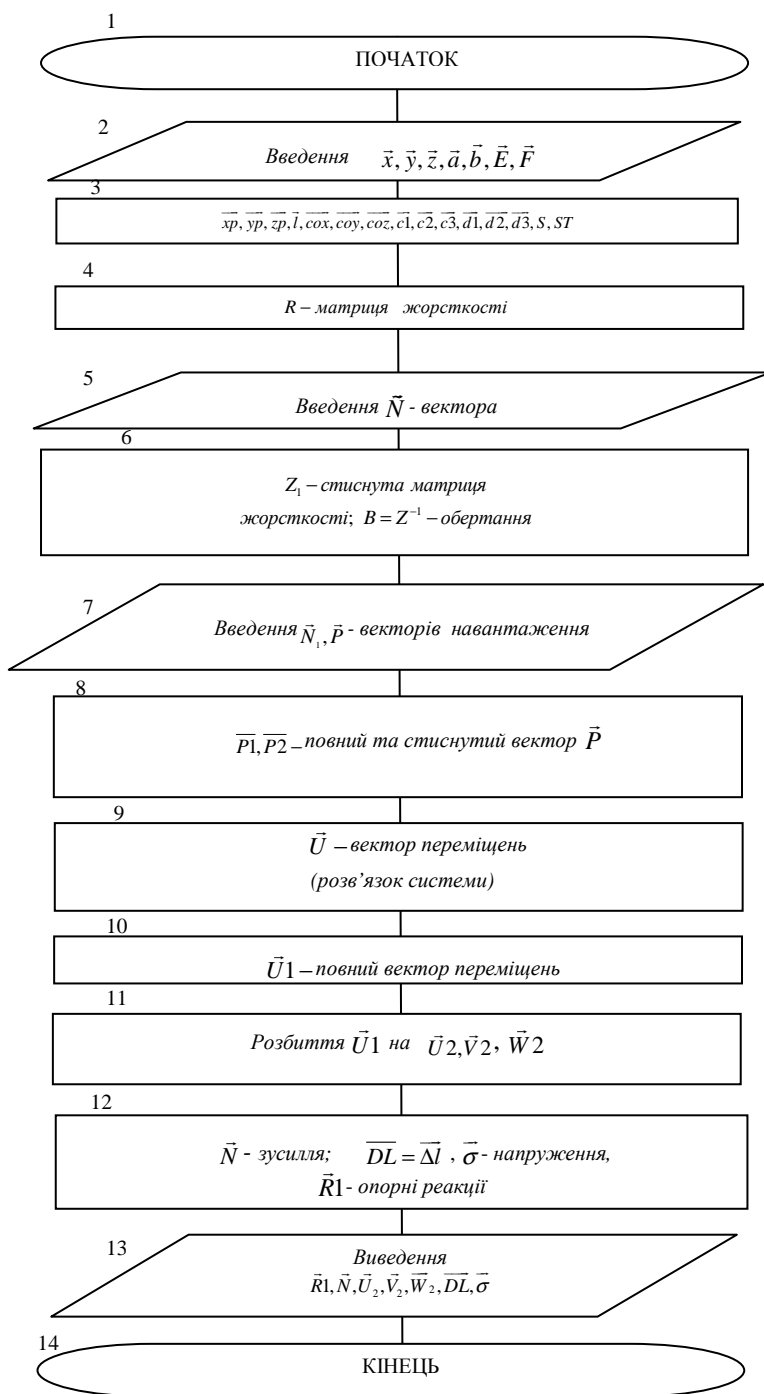


Рис. 6. Узагальнена схема алгоритму МСЕ

Формуємо умову задачі. Відома конфігурація ШСС, тобто задано пронумероване сполучення вузлів і стержнів. Порядок сполучення задається структурними векторами  $\bar{a}(n), \bar{b}(n)$ .

В вибраній системі координат  $Oxyz$  відомі координати вузлів, тобто задані координатні вектори  $\bar{x}(m), \bar{y}(m), \bar{z}(m)$

Відомі жорсткості стержнів ферми, тобто задані вектори модулів пружності  $\bar{E}(n)$  матеріалу стержнів й площ поперечних перерізів  $\bar{F}(n)$ .

Цих даних досить для складання МЖ системи. Далі враховуємо спосіб закріплення ШСС й прикладені в її вузлах навантаження, тобто заданий вектор  $\bar{c}(k)$  номерів опорних стержнів ( $k$  – їх кількість) та вектори  $\bar{N}_i(s), \bar{P}(s)$ , координати яких попарно задають номери навантажень та їх числові значення ( $s$  – кількість вузлових навантажень). Пропонується нумерація вузлових навантажень та опорних стержнів для  $i$ -го вузла відповідно в напрямку осей  $x, y, z$ :  $3i - 2; 3i - 1; 3i$ .

Порядок розв'язку показаний на узагальненій схемі алгоритму (рис. 6).

**Результати.** Розроблено оригінальний методологію підходу до розрахунку шарнірно-стержньових систем з урахуванням монтажних напружень. Детально вони розглянуті в роботі [3, 7, 10], де приводиться узагальнена схема алгоритму і окремо схема формування матриці жорсткості. Програма складена на алгоритмічній мові, її використання дає повний аналіз НДС системи.

#### Приклади:

*Приклад 1. Статично визначна просторова ферма.*

*Умова задачі:* Схема ШСС приведена на рис. 3. Початок координат вибираємо в вузлі 1. Координати вузлів приведені в таблиці 2.

Таблиця 2

#### Закріплення вузлів

| Вузли | 1 | 2   | 3   | 4 | 5   |
|-------|---|-----|-----|---|-----|
| $x$   | 0 | 2,2 | 2,2 | 0 | 0   |
| $y$   | 0 | 0   | 1,5 | 2 | 0   |
| $z$   | 0 | 0   | 0   | 0 | 2,5 |

\* Складено авторами на підставі розрахунків схеми

Враховуючи нумерацію вузлів та стержнів, складемо структурні вектори  $\bar{a}, \bar{b}$  -- таблиця 3. Там же приведені значення модулів пружності  $E$  та площ перерізів  $F$ .

Складемо вектор закріплення  $\bar{C}$  ферми. Враховуємо принцип нумерації стержнів для  $i$ -го вузла в напрямках  $x, y, z$  відповідно  $3i - 2; 3i - 1; 3i$ .

Тоді для вузлів 1, 3, 4 маємо  $\bar{C} = (1, 2, 3, 8, 9, 12); k = 6$ .

Таблиця 3

#### Закріплення стержнів

| Стержні | 1  | 2   | 3   | 4   | 5 | 6  | 7   | 8   | 9   |
|---------|----|-----|-----|-----|---|----|-----|-----|-----|
| $a$     | 1  | 1   | 1   | 2   | 2 | 2  | 3   | 3   | 4   |
| $b$     | 2  | 4   | 5   | 3   | 4 | 5  | 4   | 5   | 5   |
| $E$     | 1  | 1,2 | 0,8 | 1,5 | 1 | 2  | 0,9 | 1,4 | 1,8 |
| $F$     | 10 | 14  | 20  | 24  | 8 | 16 | 10  | 30  | 22  |

\* Складено авторами на підставі розрахунків схеми

Вектори вузлових навантажень (номери зусиль  $N$  та їх значення  $P$ ) приведені в таблиці 4.

Таблиця 4

## Вузлові навантаження

|          |     |   |   |     |
|----------|-----|---|---|-----|
| <i>N</i> | 5   | 7 | 4 | 15  |
| <i>P</i> | -20 | 7 | 5 | -12 |

\* Складено авторами на підставі розрахунків схеми

Нижче приводимо результати розрахунків на ПК.

Просторова ферма

**Умова задачі**

Координати вузлів

0,000 2,200 2,200 0,000 0,000

0,000 0,000 1,500 2,000 0,000

0,000 0,000 0,000 0,000 2,500

Структурні вектори

1 1 1 2 2 2 3 3 4

2 4 5 3 4 5 4 5 5

Модулі пружності

10000 12000 8000 15000 10000 20000 9000 14000 18000

Площі перерізів

10,00 14,00 20,00 24,00 8,00 16,00 10,00 30,00 22,00

Вектори навантаження

5 7 14 15

-20,0 7,0 5,0 -12,0

Вектор закріплення

1 2 3 8 9 12

**Результати розв'язку**

Опорні реакції

7,0000 9,7727 -5,7500 -24,7727 0,0000 -6,2500

Зусилля в стержнях

7,0000 9,7727 -5,7500 26,3636 -9,4602 0,0000 7,1785 0,0000 -8,0039

Переміщення вузлів

0,0000 0,0154 0,0993 0,0835 0,0817

0,0000 -0,0110 0,0000 0,0116 0,0108

0,0000 -0,0674 0,0000 0,0000 -0,0090

Подовження стержнів

0,0154 0,0116 -0,0090 0,0110 -0,0352 0,0000 0,0180 0,0000 -0,0065

Напруження в стержнях

0,7000 0,6981 -0,2875 1,0985 -1,1825 0,0000 0,7179 0,0000 -0,3638

*Приклад 2. Зовнішньо статично невизначна просторова ферма*

Умова задачі. Схема ШСС приведена на рис. 3, але в вузлі 2 в напрямку *z* поставлено опорний стержень. Координати вузлів, структурні вектори, модулі пружності, площі перерізів, вектори вузлових навантажень приведені в прикладі 1, див. таблиці 2–4. Складемо вектор закріплення  $\bar{C}$ :

$$\bar{C} = (1, 2, 3, 6, 8, 9, 12); \quad k = 7.$$

Нижче приводимо результати розрахунків на ПК. Наводимо значення тільки зусиль в стержнях та переміщень вузлів.

Просторова ферма

**Умова задачі**

Вектор закріплення

1 2 3 6 8 9 12

**Результати розв'язку**

Зусилля в стержнях

7,0000 9,7727 -1,8311 22,1835 -3,2460 -6,9603 2,4631 7,6338 -13,0226

Переміщення вузлів

0,0000 0,0154 0,0544 0,0507 0,0231

0,0000 -0,0092 0,0000 0,0116 0,0249

0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 -0,0029

**Висновки і перспективи.** Аналіз попередніх досліджень виявив недостатнє вивчення просторових конструкцій і недостатнє використання для їх розрахунку методу скінченних елементів. Запропоновано використання методу кінцевих елементів що дозволяє вести повний розрахунок статично визначних та статично невизначних просторових ферм на вузлову навантаження. Програма на алгоритмічній мові включає повне дослідження НДС системи.

#### Список використаних джерел

1. Снитко Н.К. Строительная механика. Москва : Высшая школа, 1972. 488 с.
2. Дарков А.В. Строительная механика. Москва : Высшая школа, 1976. 600 с.
3. Журбин О.В. Анализ инженерных конструкций методом конечных элементов. Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнаАГТУ», 2004. 157 с.
4. Писаренко Г.С. Сопrotивление материалов. 5-е изд. перераб. и доп. Київ : Вища школа. Головное издательство, 1979. 696 с.
5. Беляев Н.М. Сопrotивление материалов. Москва : Головное издательство, 1954. 856 с.
6. Феодосьев В.И. Сопrotивление материалов. Москва : Наука, 1970. 544 с.
7. Галлагер Р. Метод конечных элементов, основы ; пер. с англ. В.М. Картвешвили; под ред. Н.В. Баничука. Москва : Мир, 1984. 428 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике ; пер. с англ.; под ред. Б.Е. Победри. М.: Мир, 1975. 541 с.
9. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошных сред ; пер. с англ. О.П. Троицкого и С.В. Соловьева; под ред. Ю.К. Зарецкого. Москва : Недра, 1974. 239 с.
10. Васильева В.Н. Введение в теорию метода конечных элементов. Иркутск, Изд-во Иркут. ун-та, 1986. 149 с.

Дата надходження статті до редакції: 26.03.2017.

1 рецензування 25.04.2017 Прийняття в друк 21.05.2017

**Devin V.V.**

*Ph.D. (Techn.), Associate Professor*

*Department of Physical-mathematical and general-technical disciplines*

*State Agrarian and Engineering University in Podilya*

*Kamianets-Podilskyi, Ukraine*

*E-mail : dvvvp@rambler.ru*

**Tkachuk V.S.**

*Ph.D. (Techn.), Associate Professor*

*Department of Physical-mathematical and general-technical disciplines*

*State Agrarian and Engineering University in Podilya*

*Kamianets-Podilskyi, Ukraine*

*E-mail : twskm@mail.ru*

## CALCULATION OF SPATIAL FRAME WORK FROM EXTERNAL LOADING ACTION BY COMPLETE ELEMENT METHOD

### Abstract

The tasks of structural mechanics are complicated by issues of analytical and calculative character, even in terms of simple support flat joint-cored systems (frame work, tie bar). If we examine the spatial joint-cored systems the increase of amount of elements of such constructions results in heavy computing, static indefinable tasks are not an exception. If the joint-cored system has the external loading and works within the limits of resiliency of material of its elements, then assembling tensions should be added to tensions that arise up in the process of loading the construction; the same happens in terms of system deformations.

The spatial joint-cored systems where the tensely-deformed state from the appendix of the key loading takes place are considered. The application of eventual elements method provides the decision of the research on NDS system at its arbitrary geometry. To form the matrix of inflexibility the original program is made in algorithmic language that includes complete research not depending on degrees of static indefinability of framework. Examples of concrete tasks decision are made by the method of forces and machine method.

**Keywords:** method of eventual elements, matrix of inflexibility, spatial farm.

### References

1. Snytko, N.K. *Stroytel'naia mekhanyka* [Structural mechanics]. Moscow : Vysshiaia shkola, 1972. 488 p. [in Russian].
2. Darkov A.V. (Ed.). (1976). *Stroytel'naia mekhanyka* [Structural mechanics]. Moscow : Vysshiaia shkola [in Russian].
3. Zhurbyn, O.V. (2004). *Analyz ynzhenerykh konstruksiy metodom konechnykh elementov Ucheb. Posobyie* [Analysis of engineering structures by the finite element method]. Komsomol'sk-na-Amure: HOUVPO«KnAHTU» [in Russian].
4. Pysarenko, H.S. (1979). *Soprotyvlenye materyalov. 5-e yzd. pererab. y dop* [Strength of materials (5 ed.)]. Kyiv : Vyscha shkola [in Russian].
5. Beliaev, N.M. (1954). *Soprotyvlenye materyallov* [Strength of materials]. Moscow : Holovnoe yzdatel'stvo [in Russian].
6. Feodos'ev, V.Y. (1970). *Soprotyvlenye materyalov* [Strength of materials]. Moscow : Nauka, 1970. 544 p. [in Russian].
7. Hallaher, R. (1984). *Metod konechnykh elementov, osnovy ; Per. s anhl. V.M. Kartveshvyly; Pod red. N.V. Banychuka* [Finite Element Method (V.M. Kartveshvyly, Transl.)]. Moscow : Myr [in Russian].
8. Zenkevych, O. (1975). *Metod konechnykh elementov v tekhnike ; per. s anhl.; pod red. B.E. Pobedry* [Finite element method in engineering. This is a Chapter (B.E. Pobedry (Ed.) transl.)]. Moscow : Myr [in Russian].
9. Zenkevych, O., & Chanh, Y. (1974). *Metod konechnykh elementov v teoryi sooruzheniy y mekhanyke sploshnykh sred Per. s anhl. O.P. Troytskoho y S.V. Solov'eva; Pod red. Yu.K.Zaretskoho* [The finite element method in the theory of structures and the mechanics of continuous media (Yu.K.Zaretskiy, Ed. Transl.)]. Moscow : Nedra [in Russian].
10. Vasy'l'eva, V.N. (1986). *Vvedeniye v teoryiu metoda konechnykh elementov* [Introduction to the theory of the finite element method]. Irkutsk : Yzd-vo Yrkut. un-ta. [in Russian].

Received: March 26, 2017

1 review: April 25, 2017 Accepted : May 21, 2017