

# ТЕХНІЧНІ НАУКИ

УДК 631.332:51.74

**Єрмаков С.В.**

*завідувач навчально-наукової лабораторії «DAK GPS»  
Навчально-науковий інститут енергетики  
Подільський державний аграрно-технічний університет  
Кам'янець-Подільський, Україна  
E-mail: dakgps@pdatu.edu.ua*

**Гуцол Т.Д.**

*д-р. техн. наук., доцент  
кафедра енергозберігаючих технологій та енергетичного менеджменту  
Навчально-науковий інститут енергетики  
Подільський державний аграрно-технічний університет  
Кам'янець-Подільський, Україна  
E-mail: pro-gr@pdatu.edu.ua*

**Михайлова Л.М.**

*к.т.н., професор  
директор Навчально-наукового інституту енергетики  
Подільський державний аграрно-технічний університет  
Кам'янець-Подільський, Україна  
E-mail: nnie@pdatu.edu.ua*

## РОЗРАХУНКОВІ ФОРМУЛИ ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ВИВАНТАЖЕННЯ ЖИВЦІВ ЕНЕРГЕТИЧНОЇ ВЕРБИ З ТОЧКИ ЗОРУ ГІДРОДИНАМІЧНИХ БАГАТОФАЗНИХ СИСТЕМ.

### *Анотація*

*Численні дослідження процесу склепоутворення дозволили встановити лише деякі залежності, що пояснюють суть цього процесу. Та на сьогоднішній день немає єдиної теорії витікання сипких матеріалів і процесів склепоутворення в бункері тому проблема залишається актуальною. Дана робота є підсумковою з циклу праць авторів присвячених побудові математичної моделі процесу вивантаження живців з циліндричного бункера, тому її метою є виведення розрахункових формул руху масиву живців при гравітаційному вивантаженні їх з циліндричного бункера.*

*Дослідження спирається на відомі наукові методи обґрунтування процесу вивантажених сипкого матеріалу з ємностей, з розробкою питань вирішення проблем склепоутворення і безперервного висипання матеріалу.*

*До таких методів відноситься застосування обчислювальної математики для побудови математичної моделі руху живців і її обробки*

У статті пропонується розглядати гравітаційне вивантаження живців енергетичної верби з точки зору гідродинамічних багатофазних систем. Відповідно до цього підходу сукупність живців розглядається як псевдорідину, що складається з двох фаз: дискретної (живці) і безперервної (повітря). Приймаючи кожну з цих фаз як суцільне середовище, можемо розглядати вивантаження живців, як рух в'язкої нестисливої псевдо рідини, поле швидкості якої можна характеризувати рівнянням Нав'є - Стокса.

Результатом розробки є алгоритм побудови математичного моделі руху такої псевдорідини та перехід до розрахункових рівнянь руху з початковими і граничними умовами, що в кінцевому результаті призведе до можливості теоретичного аналізу процесу вивантаження живців з щільних бункерів.

**Ключові слова :** вивантаження живців; енергетична верба; саджалка; математична модель; рівняння Нав'є-Стокса; перетворення Лапласа; розрахункові рівняння.

**Вступ.** Останнім часом в галузі енергетики все більше уваги приділяється відновлювальним джерелам енергії. Одним з найбільш перспективних напрямків з точки зору нарощування обсягів є енергія біомаси, зокрема простежується тенденція до зростання популярності палив з біоенергетичних культур, для нарощування обсягів яких потрібні швидкі і продуктивні. Найбільш поширена в Україні енергетична верба розмножується вегетативним способом живцями довжиною 20-25 см і діаметром 5-20мм (рис. 1) [1, 2].



**Рис. 1.** Садивний матеріал енергетичної верби

На сьогоднішній день садіння такого матеріалу здійснюється саджалками (рис 2.), в яких посадковий матеріал подається виключно вручну, що істотно обмежує можливості підвищення ефективності агрегатів. Теоретичне опрацювання питань руху живців при гравітаційному вивантаженні і реалізація отриманих результатів на практиці можуть бути підмогою для створення автомата садіння [3; 4].



**Рис. 2.** Традиційні саджалки енергетичної верби

Джерело: Willowpedia; Probstdorfer [5; 6].

Відповідно з науковим напрямком, що опрацьовується в Подільському державному аграрно-технічному університеті «Обґрунтування робочого процесу та параметрів механізму подачі живців машини для садіння енергетичної верби» (державний реєстраційний номер 0119U100945) розробляється автоматизована система подачі і відбору посадкового матеріалу деревних енергетичних культур.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Питаннями вдосконалення процесу вивантаження матеріалів присвячено багато праць, але, не зважаючи на значні успіхи в цій галузі, динамічні процеси вивантаження сипких однорідних матеріалів вивчені недостатньо. Теоретичного і практичного дослідження механіки процесів висипання таких матеріалів присвячені роботи вчених: Алфьорова К. В., Білоусова А. І., Беляєва Ю.В., Березина Т. А., Блехмана І. І., Богомятких В. А., Бондаренко А. М., Василькова В. Б., Галі А., Генієва Г. А., Горюшинського В. С., Гячева Л. В., Дженіке Е. В., Єгорова С. І., Єшуткіна Д. Н., Желткова В. І., Жукова І. А., Зенкова Р. Л., Квапіла Р., Кегліна Б. Г., Клейна Г. К., Ковальова Н. І., Котова В. Л., Кунакова В.С., Локтіонової О. Г., Мурашова А. А., Нагорського І. С., Нічборса Б., Павленко Я., Пепчука А. П., Романова А. Н., Семенова В. Ф., Соколовського В. В., Степуки Л. Я., Трубіцина М. Н., Третякова Г. М., Ульянова С. В., Ушакова Л. С., Франчука В. П., Швоглера М., Шелла Д., Яцуна С. Ф. та інших. В їх роботах розглянуті основні характеристики та фізико-механічні властивості сипких матеріалів, що в тій чи іншій мірі впливають на процес склепоутворення, відображені загальні напрямки досліджень в галузі безперервного функціонування бункерних пристроїв і вдосконалення склепорушного обладнання для сипких вантажів з широким спектром фізико-механічних властивостей [7-18].

Численні дослідження процесу склепоутворення дозволили встановити лише деякі залежності, що пояснюють суть цього процесу. Ступінь впливу величезного числа різних взаємопов'язаних факторів на склепоутворення важко оцінити практично і передбачити теоретично: це і геометрія бункера і випускного отвору, і фізико-механічні властивості матеріалів, і умови завантаження, зберігання та випуску. Саме в зв'язку з труднощами в забезпеченні рівномірного безперервного руху, що виключає процес склепоутворення, до теперішнього часу не існує універсального пристрою-живильника, що ефективно працював би з будь-яким сипким матеріалом, а різноманітність матеріалу, що вимагає вивантажених сприяє подальших пошуків обґрунтувань руху того або іншого матеріалу.

Також важко переоцінити наукове і практичне значення досліджень механізму руху сипучих матеріалів під дією власної ваги, так як фізико-механічні властивості даних матеріалів і закономірності їх закінчення мають вирішальний вплив на конструкцію бункерів, а також випускних пристроїв і пристосовань, що стимулюють висипання.

Слід підкреслити, що на сьогоднішній день немає єдиної теорії вивантаження сипких матеріалів і процесів склепоутворення в бункері.

Проблема ще більше ускладнюється при необхідності забезпечення рівномірного і безперервного вивантажених матеріалу, у якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших розміру. Прикладом такого матеріалу є живці рослин.

При створенні автомата посадки такого матеріалу постало завдання швидкісний і точної подачі живців, що призвело нас до пошуку шляхів обґрунтування руху живців при вивантаженні з накопичувальної ємності [19-21].

Тому вивчення даного питання і надалі залишається актуальним. Значний вклад в розвиток даного питання внесли і автори даної праці в попередніх своїх працях. Зокрема

Одними з перших кроків у цьому напрямку є побудова математичної моделі процесу гравітаційного висипання стержнеподібних матеріалів з щільних бункерів [22-25].

Також авторами опрацьовані загальні принципи для побудови математичної моделі процесу вивантаження живців з бункера, визначені крайові умови і характеристики їх руху [26-28].

Розглянуто та обґрунтовано основні припущення про характер руху живцево-повітряної суміші, яку було представлено у вигляді двофазної псевдо рідини. Завдяки цьому деякими складовими рівнянь можна було знехтувати, а наявні рівняння руху вдалося значно спростити.

У попередніх дослідженнях на основі зроблених припущень про характер руху двофазної псевдорідини отримано спрощені рівняння [27, 28]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} &= -\gamma \mathcal{N} \rho + \bar{v} \Delta \bar{u} + \Phi(\bar{u}_1 - \bar{u}) - \bar{g} \bar{e}_2, \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} &= -0.5 \frac{\delta}{1 - \delta} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\bar{u}_1 - \bar{u}) - \Phi_1 \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\bar{u}_1 - \bar{u})(\bar{t} - \bar{\tau})^{-1/2} d\bar{\tau} - \Phi_2 (\bar{u}_1 - \bar{u}) - \bar{g} \bar{e}_2, \\ \operatorname{div} \bar{u} &= 0, \quad \operatorname{div} \bar{u}_1 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рівняння (1) - (3) стали основою для опису процесу вивантажених живців з бункера. До цих рівнянь необхідно додати початкові і крайові умови, які в нових позначеннях набули вигляду:

Початкові умови:

$$\begin{aligned} \bar{u}|_{\bar{t}=0} &= \bar{u}_1|_{\bar{t}=0} = 0, \\ \rho|_{\bar{t}=0} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Крайові умови:

$$\text{при} \quad \bar{x}_2 = h(\bar{t})/L \quad -\rho + \frac{2\mu V_0}{L} \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}_2} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}_1} = 0, \quad (6)$$

$$\dot{h} = V_0 T u_2, \quad (7)$$

$$\text{при} \quad \bar{x}_2 = -\operatorname{tg} \alpha (\bar{x}_1 + b/2L) \quad -\operatorname{ctg} \alpha h_0/L - b/2L < \bar{x}_1 < b/2L$$

$$\sin \alpha u_1 + \cos \alpha u_2 = \frac{A \omega}{V_0} \sin 2\pi \bar{t}, \quad (8)$$

$$\cos 2\alpha \left( \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}_2} \right) + 2 \sin 2\alpha \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}_1} = \frac{gL \cos^2 \alpha h(\bar{t})}{2\nu V_0}, \quad (9)$$

$$\text{при} \quad \bar{x}_2 = \operatorname{tg} \beta (\bar{x}_1 - b/2L) \quad b/2L < \bar{x}_1 < b/2L + \frac{\operatorname{ctg} \beta h_0}{L}$$

$$\cos 2\beta \left( \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}_1} \right) - 2 \sin 2\beta \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}_1} = \frac{gL \cos^2 \beta h(\bar{t})}{2\nu V_0}. \quad (10)$$

Шляхом застосування перетворення Лапласа для визначення коефіцієнтів Фур'є, отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь швидкості руху псевдорідини (див. (11), (12)) [30-31].

$$U_1 = \bar{A}_{10} e^{-\sqrt{\lambda} \bar{x}_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_n e^{-\sqrt{\lambda_n} \bar{x}_2} \left( \bar{B}_{1n} \sin \frac{2\pi n}{M} \bar{x}_1 - \bar{B}_{2n} \cos \frac{2\pi n}{M} \bar{x}_1 \right), \quad (11)$$

$$U_2 = -d/\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda_n} \bar{x}_2} \left( \bar{B}_{1n} \cos \frac{2\pi n}{M} \bar{x}_1 + \bar{B}_{2n} \sin \frac{2\pi n}{M} \bar{x}_1 \right), \quad (12)$$

де

$$\bar{\lambda}_n = \sqrt{\lambda \left( \frac{M}{2\pi i} \right)^2 + 1}. \quad (13)$$

Формули (11), (12) дають загальне розв'язання системи рівнянь руху псевдорідини. Для знаходження величин  $\bar{B}_{1n}$ ,  $\bar{B}_{2n}$  слід скористатися крайовими умовами (5) - (10).

**Мета.** Дана робота є підсумковою з циклу праць присвячених побудові математичної моделі процесу вивантаження живців з щільного бункера, тому її метою є виведення розрахункових формул руху масиву живців при гравітаційному вивантаженні їх з щільного бункера.

**Методологія дослідження.** Теоретичною базою дослідження слугували праці вітчизняних і зарубіжних вчених, в яких розроблялися наукові методи обґрунтування процесу вивантаження сипучого матеріалу з ємностей, з розробкою питань вирішення проблем склепоутворення і безперервного вивантаження матеріалу. На підставі аналізу існуючих рішень для руху матеріалу при гравітаційному висипанню створено модель руху циліндричних тіл (живців) при вільному вивантаженні з бункера.

Для попередніх досліджень за основу була прийнята модель бункера (рис. 3), в якій розгляд процесу обмежується двовимірною моделлю (в площині  $x_1x_2$ ), так як вважається, що рух живців в бункері не залежить від координати  $x_3$ , через наявність стінок, паралельних площині  $x_1x_2$ , які обмежують рух живців вздовж осі  $x_3$ .

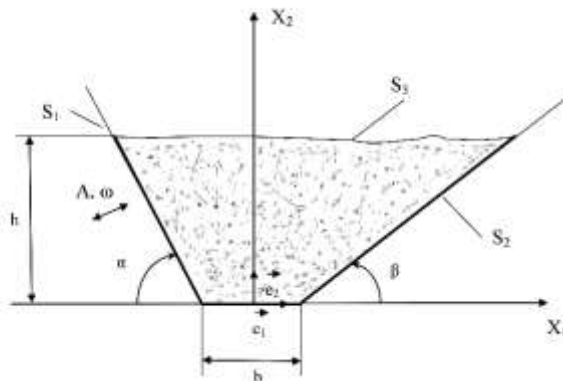


Рис. 3. Розрахункова схема бункера з живцями

При цьому на підставі аналізу існуючих рішень прийнято ряд припущень, що дозволили розглядати гравітаційне вивантаження живців з точки зору гідродинамічних багатофазних систем.

Відповідно до цього підходу сукупність живців розглядається як псевдорідину, що складається з двох фаз: дискретна фаза утворена живцями і безперервна фаза - газоподібне середовище (повітря). Кожна з цих фаз розглядається як суцільне середовище, що дозволило розглядати вивантаження, як рух в'язкої нестисливої псевдорідини. Поле швидкості такої псевдорідини має задовольняти рівнянню Нав'є - Стокса.

**Результати дослідження.** Як зазначалось в попередніх дослідженнях авторів отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів Фур'є

перетворення Лапласа швидкості руху псевдорідини (див. (11), (12)) [32-33].

Надалі, для отримання розрахункових формул швидкості руху псевдорідини обмежимося випадком симетричного бункера. В рамках прийнятої моделі бункера це означає, що для кутів  $\alpha$  і  $\beta$  виконується рівність  $\alpha = \beta$ . Це обмеження, з одного боку, не заперечує спільності представлених раніше результатів, а з іншого, дозволяє отримати розв'язання задачі (1) - (3), (4) - (10) в замкнутій аналітичній формі.

Отже, нехай  $\alpha = \beta$ , тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь набирає вигляду:

$$\bar{B}_0 \frac{1 - e^{-\sqrt{\lambda} \bar{h}_0}}{\sqrt{\lambda}} \cos \alpha + \bar{B}_1 (\cos \alpha \Phi_c - \bar{\lambda}_1 \sin \alpha \Phi_s) - \bar{B}_2 (\bar{\lambda}_1 \sin \alpha \Phi_c + \cos \alpha \Phi_s) = \bar{h}_0 \operatorname{ctg} \alpha (\bar{N}_3 - \bar{d}), \quad (14)$$

$$\cos 2\alpha \frac{1 - e^{-\sqrt{\lambda} \bar{h}_0}}{\operatorname{tg} \alpha} \bar{B}_0 - \bar{B}_1 G_c + \bar{B}_2 G_s = -f \bar{N} \bar{h}_0 \operatorname{ctg} \alpha, \quad (15)$$

$$\cos 2\alpha \frac{1 - e^{-\sqrt{\lambda} \bar{h}_0}}{\operatorname{tg} \alpha} \bar{B}_0 + \bar{B}_1 G_c + \bar{B}_2 G_s = -f \bar{N} \bar{h}_0 \operatorname{ctg} \alpha, \quad (16)$$

Тут

$$\bar{N} = \frac{g a \cos^2 \alpha \bar{h}}{v A \omega} \quad (17)$$

$$\Phi_s = \frac{1}{\lambda_1 \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{4\pi^2}{M^2}} \left[ \sqrt{\lambda_1} \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi \bar{b}}{M} + \frac{2\pi}{M} \left( \cos \frac{\pi \bar{b}}{M} + e^{-\sqrt{\lambda_1} \bar{h}_0} \right) \right], \quad (18)$$

$$\Phi_c = \frac{1}{\lambda_1 \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{4\pi^2}{M^2}} \left[ \sqrt{\lambda_1} \operatorname{tg} \alpha \left( \cos \frac{\pi \bar{b}}{M} + e^{-\sqrt{\lambda_1} \bar{h}_0} \right) - \frac{2\pi}{M} \sin \frac{\pi \bar{b}}{M} \right], \quad (19)$$

$$G_c = \frac{2\pi}{M} \left( 1 + \frac{\lambda_1 M^2}{4\pi^2} \right) \cos 2\alpha \Phi_s + 2\sqrt{\lambda_1} \sin 2\alpha \Phi_c, \quad (20)$$

$$G_s = 2\sqrt{\lambda_1} \sin 2\alpha \Phi_s - \frac{2\pi}{M} \left( 1 + \frac{\lambda_1 M^2}{4\pi^2} \right) \cos 2\alpha \Phi_c. \quad (21)$$

Отримаємо розв'язок цієї системи рівнянь. З (15) і (16) випливає

$$\bar{B}_1 = 0, \quad (22)$$

$$\bar{B}_0 = -\frac{b_2 G_s \operatorname{tg} \alpha + f \bar{N} \bar{h}_0}{\cos 2\alpha (1 - e^{-\sqrt{\lambda} \bar{h}_0})}, \quad (23)$$

Підставляючи (22) і (23) в (14) остаточно маємо:

$$\bar{B}_0 = \frac{\sqrt{\lambda} \bar{h}_0 \operatorname{ctg} \alpha}{1 - e^{-\sqrt{\lambda} \bar{h}_0}} \left[ \frac{\bar{N}_3 - \bar{d} - (\bar{\lambda}_1 \sin \alpha \Phi_c + \cos \alpha \Phi_s) (\sqrt{\lambda} \cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha (\bar{N}_3 - \bar{d}) + f \bar{N})}{G_s + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \alpha \cos 2\alpha (\bar{\lambda}_1 \sin \alpha \Phi_c + \cos \alpha \Phi_s)} \right], \quad (24)$$

$$\bar{B}_2 = -\frac{\bar{h}_0 \operatorname{ctg} \alpha (\sqrt{\lambda} \cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha (\bar{N}_3 - \bar{d}) + f \bar{N})}{G_s + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \alpha \cos 2\alpha (\bar{\lambda}_1 \sin \alpha \Phi_c + \cos \alpha \Phi_s)}. \quad (25)$$

Формули (22), (24), (25) дають розв'язок системи рівнянь (14) - (16).

Далі, використовуючи (22), (24) і (25), отримаємо такі формули для перетворення Лапласа  $U_1$  і  $U_2$  швидкості руху псевдо рідини:

$$U_1 = \bar{h}_0 \operatorname{ctg} \alpha \left[ \frac{\sqrt{\lambda}}{1 - e^{-\sqrt{\lambda} \bar{x}_2}} \left( \frac{2\pi}{q^2 + 4\pi^2} + \frac{d}{\lambda} - D_1 D_2 \right) e^{-\sqrt{\lambda} \bar{x}_2} + \right. \\ \left. + D_2 \frac{\sqrt{\lambda_1} M}{2\pi} e^{-\sqrt{\lambda_1} \bar{x}_2} \cos \frac{2\pi}{M} \bar{x}_1 \right], \quad (26)$$

$$U_2 = \frac{d}{\lambda} - \bar{h}_0 \operatorname{ctg} \alpha D_2 e^{-\sqrt{\lambda_1} \bar{x}_2} \sin \frac{2\pi}{M} \bar{x}_1, \quad (27)$$

де

$$D_1 = \sqrt{\lambda_1} \frac{M}{2\pi} \sin \alpha \Phi_c + \cos \alpha \Phi_s, \quad (28)$$

$$D_2 = \frac{\sqrt{\lambda} \cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha \left( \frac{2\pi}{q^2 + 4\pi^2} + \frac{d}{\lambda} \right) + f\bar{N}}{G_s + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \alpha \cos 2\alpha D_1}. \quad (29)$$

Ці формули можна спростити, враховуючи той факт, що величина  $\frac{2\pi}{M} \ll 1$ , якщо

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ і } \bar{h}_0 = \frac{h_0}{2\alpha} \gg 1.$$

В цьому наближенні маємо:

$$D_1 \approx \sqrt{\lambda} \frac{M}{2\pi} \sin \alpha \Phi_c, \quad (30)$$

$$G_s \approx -\frac{\lambda M}{2\pi} \cos 2\alpha \Phi_c, \quad (31)$$

$$\Phi_c \approx \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{\lambda}} \cos \frac{\pi \bar{b}}{M}. \quad (32)$$

Підставимо (30)–(32) в (29) і (26), (27) і провівши необхідні перетворення, маємо:

$$U_2 \approx -\frac{d}{\lambda} + \frac{2\pi \bar{h}_0}{M(1 - \cos \alpha) \cos \frac{\pi \bar{b}}{M}} \left( \operatorname{ctg} \alpha D + \frac{f\bar{N}}{\sqrt{\lambda_1} \cos 2\alpha} \right) e^{-\sqrt{\lambda_1} \bar{x}_2} \sin \frac{2\pi}{M} \bar{x}_1, \quad (33)$$

$$U_1 \approx \bar{h}_0 \operatorname{ctg} \alpha \left[ \frac{\sqrt{\lambda}}{1 - e^{-\sqrt{\lambda} \bar{h}_0}} \left( D \left( 1 + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha \right) + \frac{f\bar{N} \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{\lambda_1} \cos 2\alpha} \right) e^{-\sqrt{\lambda} \bar{x}_2} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(1 - \cos \alpha) \cos \frac{\pi \bar{b}}{M}} \left( D + \frac{f\bar{N}}{\sqrt{\lambda_1} \cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha} \right) e^{-\sqrt{\lambda_1} \bar{x}_2} \cos \frac{2\pi}{M} \bar{x}_1 \right]. \quad (34)$$

Тут

$$D = \frac{2\pi}{q^2 + 4\pi^2} + \frac{d}{\lambda},$$

$$\bar{N} = \frac{g a \cos^2 \alpha \bar{h}}{\nu A \omega}.$$

Формули (33), (34) дають наближене значення функцій  $U_1$  і  $U_2$  з відносною похибкою менше 5%, що достатньо для практичних обчислень.

Для того, щоб за допомогою (33), (34) отримувати розв'язок вихідної задачі досить застосувати перетворення зворотне до перетворення Лапласа [32, 33]

$$u_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{a}-i\infty}^{\bar{a}+i\infty} U_1 e^{q\bar{t}} dq, \quad u_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{a}-i\infty}^{\bar{a}+i\infty} U_2 e^{q\bar{t}} dq \quad (35)$$

де  $\bar{a} > 0$ .

Наступний крок полягає в обчисленні інтегралів (35). З цією метою досліджуємо функції  $U_1$  і  $U_2$  як функції - параметра перетворення Лапласа. Як впливає з (33) і (34), ця функція залежить від. Тому, маючи на увазі, що  $q$  може приймати комплексне значення, слід виділити одну з гілок аналітичної функції  $\sqrt{q}$ . Для цього, в комплексній площині змінної  $q$  зробимо розріз по від'ємній дійсній півосі ( $\operatorname{Re} q < 0, \lim q < 0$ ). У такій комплексній площині виділимо гілку  $\sqrt{q}$  для якої  $\operatorname{Re} \sqrt{q} \geq 0$  і  $-\pi < \arg q \leq \pi$ . Легко побачити, що функції  $U_1$  і  $U_2$  є аналітичними функціями комплексної змінної  $q$  виключаючи вказаний вище розріз і точки  $q=0$ ,  $q=\pm i2\pi$ . Причому, точки  $q=\pm i2\pi$  є особливими точками типу полюса, а точка  $q=0$  є точкою розгалуження алгебраїчного типу. Крім того, функції  $U_1$  і  $U_2$  прагнуть до нуля. Такі властивості функцій  $U_1$  і  $U_2$  гарантують застосовність теореми про лишки [32] і дозволяють обчислення інтеграла (35) замінити обчисленням лишків в точках  $q=\pm i2\pi$  і інтегралів від цих функцій по колу з нескінченно малим радіусом і центром в точці розгалуження  $q=0$ . Обчислення лишків можна здійснити за формулою [32, 33]

$$\operatorname{res} U_{1,2}(\pm i2\pi) = \lim_{q \rightarrow \pm i2\pi} (q \pm i2\pi) U_{1,2}(q) \quad (36)$$

Таким чином, на підставі вище викладеного, отримаємо

$$u_1(x_1, x_2, t) = \operatorname{res}(U_1(2\pi)e^{i\omega t}) + \operatorname{res}(U_1(-2\pi)e^{-i\omega t}) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} U_1 e^{\frac{q t \omega}{2\pi}} dq \quad (37)$$

$$u_2(x_1, x_2, t) = \operatorname{res}(U_2(2\pi)e^{i\omega t}) + \operatorname{res}(U_2(-2\pi)e^{-i\omega t}) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} U_2 e^{\frac{q t \omega}{2\pi}} dq \quad (38)$$

Тут - позначає лишок, - коло радіуса  $\varepsilon$  з центром в точці  $q=0$ .

Використовуючи формулу (36), отримаємо

$$u_{11} = \operatorname{res}(U_1(2\pi)e^{i\omega t}) + \operatorname{res}(U_1(-2\pi)e^{-i\omega t}) = \frac{\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} h_0 \operatorname{ctg} \alpha \left( 1 + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \left[ \cos \gamma - \sin \gamma - e^{-\gamma} (\cos(\gamma - \bar{\gamma}) - \sin(\gamma - \bar{\gamma})) \right]}{1 + e^{-2\gamma} - 2 \cos \bar{\gamma} e^{-\bar{\gamma}}} e^{-\bar{\gamma} \frac{x_2}{h_0}} \quad (39)$$

$$- \frac{\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} h_0 \operatorname{ctg} \alpha (\cos \gamma - \sin \gamma)}{(1 - \cos \alpha) \cos \frac{\pi b}{M}} e^{-\bar{\gamma} \frac{x_2}{h_0}} \cos \frac{2\pi x_1}{M},$$

$$u_{21} = \operatorname{res}(U_2(2\pi)e^{i\omega t}) + \operatorname{res}(U_2(-2\pi)e^{-i\omega t}) = \frac{2\pi h_0 \operatorname{ctg} \alpha \cos \gamma}{(b + 2h_0 \operatorname{ctg} \alpha)(1 - \cos \alpha) \cos \frac{\pi b}{M}} e^{-\bar{\gamma} \frac{x_2}{h_0}} \sin \frac{2\pi x_1}{M}, \quad (40)$$

У формулах (39), (40) безрозмірні змінні  $\bar{t}$ ,  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  замінені на розмірні  $t$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  змінні. Величина  $\bar{M} = b + h_0 \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $b$  - ширина розвантаженого вікна,

$h_0$  - відстань від вільної кордону шару живців до площини розвантаженого вікна в момент часу  $t=0$ .

$$\text{Величина } \gamma = \omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} x_2, \bar{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} h_0.$$

Обчислимо інтеграли в (37), (38). Для цього будемо припускати, що відстань від



границі вільної поверхні живців до площини розвантажувального вікна змінюється в часі за лінійним законом

$$h(t) = ct + h_0, \quad (41)$$

де  $c$  - деяка константа, що підлягає визначенню.

Тоді перетворення Лапласа цієї функції

$$\bar{h}(q) = \frac{c}{q^2} + \frac{h_0}{q}. \quad (42)$$

Підставимо (42) в (36) і (33) в (34). Проробивши необхідні перетворення, маємо

$$u_{12} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_\varepsilon} U_1 e^{\frac{q\omega}{2\pi}} dq = \frac{\text{ctg } \alpha g}{A\omega} \times \left( \bar{c} + h_0 \right) e^{-\frac{2\pi}{M}x_2} + \left[ \left( 1 + \text{ctg } \alpha \text{ctg } \frac{\alpha}{2} \right) \frac{2\bar{\rho}_1(1-\delta)}{\omega\bar{\rho}\delta} - \frac{\bar{M}f \text{ctg } \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha}{4\pi \cos^2 \alpha \nu} \times \left( \frac{4\pi h_0 \bar{\rho}_1(1-\delta)}{(1-\cos \alpha)\bar{M} \cos \frac{\pi b}{M} \bar{\rho}\omega\delta} + \frac{h_0 \text{tg } 2\alpha f}{4(1-\cos \alpha)\nu} (\bar{C} + h_0) \right) e^{\frac{2\pi}{M}x_2} \cos \frac{2\pi}{M}x_1 \right] \quad (43)$$

$$u_{22} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_\varepsilon} U_2 e^{\frac{q\omega}{2\pi}} dq = \frac{2g\bar{\rho}_1(1-\delta)}{A\omega\bar{\rho}\delta} \left( 1 - \frac{2\pi h_0 \text{ctg } \alpha}{(1-\cos \alpha)\bar{M} \cos \frac{\pi b}{M}} e^{\frac{2\pi}{M}x_2} \sin \frac{2\pi}{M}x_1 \right) - \frac{h_0 f g \cos^2 \alpha}{(1-\cos \alpha) \cos \frac{\pi b}{M} \cos 2\alpha \nu A \omega} (\bar{C} + h_0) e^{-\frac{2\pi}{M}x_2} \sin \frac{2\pi}{M}x_1, \quad (44)$$

де  $\bar{C} = 2ca/\pi$ .

Остаточно маємо наступні розрахункові формули для компонент швидкості руху дискретної фази (сукупність живців) псевдорідини

$$u_1 = u_{11} - u_{12}, \quad (45)$$

$$u_2 = u_{21} - u_{22}. \quad (46)$$

де величини  $u_{11}$ ,  $u_{12}$ ,  $u_{21}$ ,  $u_{22}$  визначаються за формулами (39), (40) і (43), (44).

Як впливає з (43), (44), величини  $u_{12}$  і  $u_{22}$  не залежать від тимчасової змінної  $t$ , але залежать від просторових змінних  $x_1$  і  $x_2$ . Величини  $u_{11}$  і  $u_{21}$  залежать від тимчасової змінної по гармонічному закону у відповідності з вібраційними коливаннями, які впливають на одну зі стінок бункера. Крім того, ці величини залежать від фізико-механічних і геометричних параметрів живців (усереднена щільність, радіус кола по

площі збігається з площею поперечного перерізу живців, коефіцієнт сухого тертя між живцями), параметрами бункера (кут нахилу стінок, ширина вивантажувального вікна, коефіцієнта тертя об стінки бункера), амплітуди і частоти гармонічних віброколивань, кінематичного коефіцієнта в'язкості і щільності повітря.

Крім зазначених параметрів компоненти швидкості  $u_1$  і  $u_2$  неявно залежать від функції  $h(t)$  (див. 41). Як впливає з крайової умови, ця функція повинна задовольняти нелінійному диференціальному рівнянню першого порядку

$$h = A \omega u_2(x_1, h(t), t) \quad (47)$$

Розв'язання цього рівняння, в загальному випадку, можна знайти тільки чисельними методами за допомогою комп'ютера. Однак, якщо припустити, що функція  $h(t)$  залежить від часу за лінійним законом (див. 41)

$$h(t) = ct + h_0,$$

То можна визначити константу  $c$ .

Справді, підкладемо в (47)  $x_1 = 0$ . Тоді, з урахуванням (40) і (44), маємо

$$c = -\frac{2g\bar{p}_1(1-\delta)}{\omega\bar{p}\delta} \quad (48)$$

Цю константу слід підставити в (39), (40) і (43), (44). Це завершує побудову математичної моделі процесу вивантажених живців з бункера.

**Висновки і перспективи.** На сьогоднішній день відомі саджалки деревних енергетичних культур виключно з ручною закладкою посадкового матеріалу, тому розробка систем автоматизації даного процесу сприятиме можливостям швидкого нарощування площ під енергетичними насадженнями

Найбільш простим способом руху матеріалу при вивантаженні є його рух під дією гравітаційних сил. Теоретичні обґрунтування такого руху не мають єдиного підходу, а специфіка матеріалу для садіння енергетичної верби, створюють додаткові труднощі для розробки математичної моделі цього процесу. Побудова математичної моделі руху живців енергетичної верби дозволить автоматизувати процес посадки.

Приймаючи ряд припущень пропонується розглядати гравітаційне вивантажених живців з точки зору гідродинамічних багатофазних систем. Відповідно до цього підходу сукупність живців розглядається як нестисливої псевдорідини, що складається з двох фаз: дискретної, утвореної живцями і безперервної фази (газоподібна - середовище між живцями). А шляхом застосування перетворення Лапласа для визначення коефіцієнтів Фур'є, отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь швидкості руху псевдорідини (див. (12), (13)), що дають загальне розв'язання системи рівнянь руху такої псевдорідини з окресленням початкових і крайових умов.

Для отримання розрахункових формул швидкості руху псевдорідини ми обмежилися випадком симетричного бункера, що дозволило отримати розв'язання задачі (1) - (3), (4) - (10) в замкнутій аналітичній формі.

Формули (33), (34) дають наближене значення функцій  $U_1$  і  $U_2$  з відносною похибкою менше 5%, що достатньо для практичних обчислень. Для того, щоб за допомогою (33), (34) отримувати розв'язок вихідної задачі досить застосувати перетворення зворотне до перетворення Лапласа [32]

Таким чином, остаточно отримано розрахункові формули для компонент швидкості руху дискретної фази (сукупність живців) псевдорідини (45) і (46), окремі компоненти яких  $u_{11}$ ,  $u_{12}$ ,  $u_{21}$ ,  $u_{22}$  визначаються за формулами (39), (40) і (43), (44).

## Список використаних джерел

1. Роїк, М. В., Сінченко, В. М., Фучило, Я. Д. Енергетична верба: технологія вирощування та використання. Вінниця : Нілан-ЛТД, 2015. 340 с.
2. Frączek, J., Mudryk, K. Jakości sadzonek wierzby energetycznej w aspekcie sadzenia mechanicznego. *Inżynieria Rolnicza*. 2005. №6 (66). С.159–167.
3. Минько, Р. Н. Проблема сводообразования в емкостях бункерного типа в условиях длительного хранения. *Ярославский педагогический вестник*, №3(1). 2013. С. 61–65
4. Ловейкін, В. С., Шимко, Л. С., Ярошенко, В. В. Огляд досліджень витоку сипких матеріалів *Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин*. 2010. Вип. 40(1). С. 324–333.
5. Willowpedia. Retrieved: Retrieved from: <https://www.youtube.com/user/Willowpedia>. Access: 24.12.2020.
6. Probstdorfer Saatzucht. Retrieved from: <https://www.probstdorfer.at>. Access: 24.12.2020
7. Гениев, Г. А. Динамика пластической и сыпучей сред. Москва: Издательство литературы по строительству, 1972. 215 с.
8. Гольденблат, И. И., Копнов, В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. Москва: Машиностроение, 1968. 190 с.
9. Горюшинский, И. В. Емкости для сыпучих грузов в транспортно-грузовых системах. Самара: СамГАПС, 2003. 232 с.
10. Гячев, Л. В. Движение сыпучих материалов в трубах и бункерах. Москва: Машиностроение, 1968. 184 с.
11. Гячев, Л. В. Основы теории бункеров. Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 1992. 312 с.
12. Дальский, А. М. Справочник технолога-машиностроителя. Москва: Машиностроение, 2001.
13. Долгунин, В. Н., Борщев, В. Я. Быстрые гравитационные течения зернистых материалов: техника измерения, закономерности, технологическое применение. Москва: Издательство Машиностроение-1, 2005. 112 с.
14. Зенков, Р. Л. Бункерные устройства. Москва: Машиностроение, 1966. 234 с.
15. Зенков, Р. Л. Механика насыпных грузов. Москва: Машиностроение, 1964. 250 с.
16. Клейн, Г. К. Строительная механика сыпучих тел. Москва: Стройиздат, 1977. 256 с.
17. Соколовский, В. В. Статика сыпучей среды. Москва: Наука, 1990. 272 с.
18. Yermakov, S., Borys, M. Efficiency analysis of the energy willow planting devices. *Materialy XI Mezinárodní vědecko-praktická konference "Věda a vznik - 2015"*. Praha: Publishing House Education and Science. 2015. v.14. P. 47–49.
19. Єрмаков, С.В. Перспективи удосконалення конструкцій для садіння живців енергетичних культур. *Подільський вісник: сільське господарство, техніка, економіка*. 2017. Вип. 26. С. 37–45.
20. Єрмаков, С., Борис, Н. Сопоставление решений лесопосадочных машин с требованиями для энергетических древесных культур (ива, тополь). *Научно-теоретический и практический журнал "Современный научный вестник"*. №20-1 (267). Белгород: Руснаучкнига, 2016. С. 67–68.
21. Yermakov, S., Hutsol, T., Slobodian, S., Komarnitskiy, S., Tysh, M. Possibility of using automation tools for planting of the energy willow cuttings. *Renewable Energy Sources: Engineering, Technology, Innovation*. 2018. P. 419–429. DOI: 10.1007/978-3-030-13888-2\_42 .
22. Єрмаков, С., Tulej, M., Tulej, W., Шевчук, І. Аналіз конструкцій автоматів садіння Матеріали XXXIV Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Тенденції та перспективи розвитку науки і освіти в умовах глобалізації». Вип. 34. Переяслав-Хмельницький. 2018. С. 615–619.
23. Hutsol, T., Yermakov, S., Firman, Ju., Duganets, V., Bodnar, A. Analysis of technical solutions of planting machines, which can be used in planting energy willow *Renewable Energy Sources: Engineering, Technology, Innovation*. 2018. P. 99–111. DOI: 10.1007/978-3-030-13888-2\_10 .
24. Єрмаков, С. Гуцол, Т., Ковалишин, С. Застосування закономірностей витікання сипких тіл для вивантаження живців деревних культур. *Аграрна наука та освіта в умовах євроінтеграції*. 2019. С.34–36.
25. Єрмаков, С. В., Гуцол, Т. Д., Девін, В. В. Проблеми безперервного вивантаження живців

енергетичної верби з бункера. *Сучасний рух науки*. Дніпро, 2019. Т.1. С.529–533.

26. Yermakov, S., Hutsol, T., Ovcharuk, O., Kolosiuk, I. Mathematic simulation of cutting unloading from the bunker. *Independent journal of management & production v.10, n.7, Special Edition PDATU*, 2019. P. 758–777; ISSN: 2236-269X. DOI: 10.14807/IJMP.V10I7.909.

27. Yermakov, S., Hutsol, T., Mudryk, K., Dziedzic, K., Mykhailova, L. The analysis of stochastic processes in unloading the energy willow cuttings from the hopper. *Vide. Tehnologija. Resursi - Environment, Technology, Resources*. Rezekne. 2019. P. 249–252. ISSN: 16915402. DOI: 10.17770/etr2019vol3.4159.

28. Yermakov, S.V., Hutsol, T.D. Features of the heterogeneous rood-like materials outflow (by example of energy willow cutting). *Technological and methodological aspects of agri-food engineering in young scientist research*. 2018. P. 55–68.

29. Dziedzic, K., Łapczyńska-Kordon, B., Mudryk, K. Decision support systems to establish plantations of energy crops on the example of willow (*Salix Viminalis* L.). *Scientific achievements in agricultural engineering, agronomy and veterinary medicine polish ukrainian cooperation*. 2017. Vol. 1, № 1, P.150–160.

30. Ivanyshyn, V., Yermakov, S., Ishchenko, T., Mudryk, K., Hutsol, T. Calculation algorithm for the dynamic coefficient of vibro-viscosity and other properties of energy willow cuttings movement in terms of their unloading from the tanker. *E3S Web of Conferences*, 2020, 154. № 04005 Retrieved from: <https://10.1051/e3sconf/202015404005>.

31. Yermakov, S. Application of the Laplace transform to calculate the velocity of a two-phase fluid modulated by the movement of cuttings of an energy willow (*Salix Viminalis*). *Teka. Quarterly journal of agri-food industry*. 2019. Vol.2. P. 71–78.

32. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного. Москва: Издательство физико-математической лит., 1958. 674с.

33. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 504с.

*Дата надходження статті до редакції: 11.03.2021*  
*Рецензування 12.05.2021 Прийняття в друк: 28.06.2021*

**Yermakov S.V.**

*Head of the educational and scientific Laboratory “DAK GPS”,  
Institute of Energy*

*State Agrarian and Engineering University in Podilya  
Kamianets-Podilskyi, Ukraine*

*E-mail : dakgps@pdatu.edu.ua*

**Hutsol T.D.**

*Dr. Sc.(Techn.), Associate Professor*

*Institute of Energy*

*State Agrarian and Engineering University in Podilya  
Kamianets-Podilskyi, Ukraine*

*E-mail : pro-gp@pdatu.edu.ua*

**Mykhailova L.M.**

*Ph.D.(Techn.), Professor,*

*Director of the Institute of Energy*

*State Agrarian and Engineering University in Podilya  
Kamianets-Podilskyi, Ukraine*

*E-mail : nnie@pdatu.edu.ua*

**CALCULATION FORMULAS FOR DETERMINING THE SPEED  
OF UNLOADING ENERGY WILLOW CUTTINGS FROM THE POINT  
OF VIEW OF HYDRODYNAMIC MULTIPHASE SYSTEMS**

### Abstract

Numerous studies of the process of vaulting have established only some dependencies that explain the essence of this process. But today there is no single theory of leakage of bulk materials and cryptocurrency processes in the hopper, so the problem remains relevant. This work is the final of a series of works by the authors devoted to the construction of a mathematical model of the process of unloading cuttings from the slot hopper, so its purpose is to derive calculation formulas for the mass of cuttings by gravity unloading them from the slot hopper.

The research is based on the known scientific methods of substantiation of the process of unloading bulk material from tanks, with the development of issues of solving the problems of basement formation and continuous pouring of the material.

Such methods include the use of computational mathematics to build a mathematical model of the movement of cuttings and its processing

In the article it is offered to consider gravitational unloading of cuttings of an energy willow from the point of view of hydrodynamic multiphase systems. According to this approach, the set of cuttings is considered as a pseudo-liquid, consisting of two phases: discrete (cuttings) and continuous (air). Taking each of these phases as a continuous medium, we can consider the unloading of cuttings as the motion of a viscous incompressible pseudo-liquid, the velocity field of which can be characterized by the Navier–Stokes equation.

The result of the development is an algorithm for constructing a mathematical model of motion of such a pseudofluid and the transition to the calculated equations of motion with initial and boundary conditions, which will eventually lead to the possibility of theoretical analysis of the process of unloading cuttings from slot bunkers.

**Keywords:** unloading of cuttings, energy willow, planter, mathematical model, Navier–Stokes equation, Laplace transform, calculation equations.

### References

1. Roik, M. V., Sinchenko, V. M., Fuchylo, Ya. D. (2015). Enerhetychna verba: tekhnolohiia vyroshchuvannya ta vykorystannya. [Energy willow: technology of cultivation and use]. Vinnytsia : Nilan-LTD.
2. Frączek, J., Mudryk, K. (2005). Jakości sadzonek wierzby energetycznej w aspekcie sadzenia mechanicznego [The quality of energy willow seedlings in terms of mechanical planting]. *Inżynieria Rolnicza* [Agricultural Engineering]. 6 (66), 159–167.
3. Mynko, R. N. (2013). Problema svodoobrazovanyia v emkostiakh bunkernoho typu v uslovyakh dlytelnoho khraneniia [The problem of vaulting in bunker-type tanks under conditions of long-term storage]. *Yaroslavskiy pedahohycheskiy vestnyk* [Yaroslavl Pedagogical Bulletin], 3(1), 61–65
4. Loveikin, V. S., Shymko, L. S., Yaroshenko, V. V. (2010). Ohliad doslidzhen vygotu sypykhykh materialiv [Review of research on the leakage of bulk materials]. *Konstruiuvannya, vyrobnytstvo ta ekspluatatsiia silskohospodarskykh mashyn* [Design, manufacture and operation of agricultural machinery], 40(1), 324–333.
5. Willowpedia. Retrieved from <https://www.youtube.com/user/Willowpedia>. Access: 24.12.2020.
6. Probstdorfer Saatzucht. Retrieved from <https://www.probstdorfer.at>. Access: 24.12.2020
7. Geniev, G. A. (1972). *Dinamika plasticheskoy i syipuchey sred* [Dynamics plastic and friable environments]. Moscow : Izdatelstvo literatury po stroitelstvu.
8. Goldenblat, I. I., Kopnov, V. A. (1968). *Kriterii prochnosti i plastichnosti konstruksionnykh materialov* [Criteria of durability and plasticity of construction materials]. Moscow : Mashinostroenie.
9. Goryushinskiy, I. V. (2003). *Emkosti dlya syipuchih gruzov v transportno-gruzovyih sistemah* [Capacity for friable loads in the transport-freight systems]. Samara: SamGAPS.
10. Gyachev, L. V. (1968). *Dvizhenie syipuchih materialov v trubah i bunkerah* [Motion friable materials in pipes and bunkers]. Moscow : Mashinostroenie.
11. Gyachev, L. V. (1992). *Osnovy teorii bunkerov* [Bases of theory of bunkers]. Novosibirsk: Izd-vo Novosibirskogo universiteta.
12. Dalskiy, A. M. (2001). *Spravochnik tehnologa-mashinostroytelya* [Reference book of machine technologist-builder]. Moscow : Mashinostroenie, 2001.
13. Dolgunin, V. N., Borschev, V. Ya. (2005). *Byistrye gravitatsionnyie techeniya zernistykh materialov: tehnika izmereniya, zakonmernosti, tehnologicheskoe primenenie* [Rapid gravitational flows of grainy materials : technique of measuring, conformity to law, technological application]. Moscow :

Izdatelstvo Mashinostroenie-1.

14. Zenkov, R. L. (1966). Bunkernye ustroystva [Bunker devices]. Moscow : Mashinostroenie.
15. Zenkov, R. L. (1964). *Mehanika nasyipnykh gruzov.* [Mechanics of bulk loads]. Moscow : Mashinostroenie.
16. Kleyn, G. K. (1977). *Stroitel'naya mehanika syipuchih tel* [Structural mechanics of friable bodies]. Moscow : Stroyizdat.
17. Sokolovskiy, V. V. (1990) *Statika syipuchey sredy* [Statics of friable environment]. Moscow : Nauka.
18. Yermakov, S., Borys, M. (2015). Efficiency analysis of the energy willow planting devices. *Materialy XI Mezinarnodni vedecko-prakticka konference "Veda a vznik - 2015"*. Praha : Publishing House Education and Science, 47-49.
19. Yermakov, S.V. (2017). *Perspektyvy udoskonalennia konstruksii dlia sadinnia zhyvtstv enerhetychnykh kultur* [Prospects for improving structures for planting cuttings of energy crops]. *Podil'skyi visnyk: sil'ske hospodarstvo, tekhnika, ekonomika* [Podil'skyi Bulletin: agriculture, technology, economics]. 26, 37–45.
20. Yermakov, S., Boris, N. (2016). *Sopostavlenie resheniy lesoposadochnykh mashin s trebovaniyami dlya energeticheskikh drevesnykh kultur (iva, topol)* [Comparison of planting machine solutions with the requirements for energy tree crops (willow, poplar)]. *Nauchno-teoreticheskii i prakticheskii zhurnal "Sovremennyyi nauchnyy vestnik"* [Scientific-theoretical and practical journal "Modern Scientific Bulletin"]. 20-1 (267). Belgorod: Rusnauchkniga, 67–68.
21. Yermakov, S., Hutsol, T., Slobodian, S., Komarnitskiy, S., Tysh, M. (2018). Possibility of using automation tools for planting of the energy willow cuttings. *Renewable Energy Sources: Engineering, Technology, Innovation*. 419–429. Retrieved from [https://doi.org/10.1007/978-3-030-13888-2\\_42](https://doi.org/10.1007/978-3-030-13888-2_42).
22. Yermakov, S., Tulej, M., Tulej, W., Shevchuk, I. (2018). *Analiz konstruksii avtomativ sadinnia Tendentsii ta perspektyvy rozvytku nauky i osvity v umovakh hlobalizatsii*, 34. 615–619.
23. Hutsol, T., Yermakov, S., Firman, Ju., Duganets, V., Bodnar, A. (2018). Analysis of technical solutions of planting machines, which can be used in planting energy willow *Renewable Energy Sources: Engineering, Technology, Innovation*, 99–111. Retrieved from [https://doi.org/10.1007/978-3-030-13888-2\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-13888-2_10).
24. Yermakov, S. Hutsol, T., Kovalyshyn, S. (2019). *Zastosuvannia zakonmirmostei vytykannia spykykh til dlya vyvantazhennia zhyvtstv derevnykh kultur* [Application of patterns of flow of loose bodies for unloading of cuttings of wood cultures]. *Ahrarna nauka ta osvita v umovakh yevrointehratsii* [Agricultural science and education in the context of European integration]. 34–36.
25. Yermakov, S. V., Hutsol, T. D., Devin, V. V. (2019). *Problemy bezperervnoho vyvantazhennia zhyvtstv enerhetychnoi verby z bunkera* [Problems of continuous unloading of cuttings of energy willow from the hopper]. *Suchasnyi rukh nauky* [The modern movement of science]. Dnipro, 1, 529–533.
26. Yermakov, S., Hutsol, T., Ovcharuk, O., Kolosiuk, I. (2019). *Mathematic simulation of cutting unloading from the bunker.* *Independent journal of management & production Special Edition PDATU*, 10, 758–777; 2236-269X. Retrieved from <https://doi.org/10.14807/IJMP.V10I7.909>.
27. Yermakov, S., Hutsol, T., Mudryk, K., Dziedzic, K., Mykhailova, L. (2019). The analysis of stochastic processes in unloading the energywillow cuttings from the hopper. *Vide. Tehnologija. Resursi - Environment, Technology, Resources*. Rezekne. 2019. 249–252. Retrieved from <https://doi.org/10.17770/etr2019vol3.4159>.
28. Yermakov, S. V., Hutsol, T. D. (2018). Features of the heterogeneous rood-like materials outflow (by example of energy willow cutting). *Technological and methodological aspects of agri-food engineering in young scientist research*. 55–68.
29. Dziedzic, K., Lapczynska-Kordon, B., Mudryk, K. (2017). Decision support systems to establish plantations of energy crops on the example of willow (*Salix Viminalis* L.). *Scientific achievements in agricultural engineering, agronomy and veterinary medicine polish ukrainian cooperation, 1*, 150–160.
30. Ivanyshyn, V., Yermakov, S., Ishchenko, T., Mudryk, K., Hutsol, T. (2020). Calculation algorithm for the dynamic coefficient of vibro-viscosity and other properties of energy willow cuttings movement in terms of their unloading from the tanker. *E3S Web of Conferences*, 154. 04005. Retrieved

from <https://10.1051/e3sconf/202015404005>.

31. Yermakov, S. (2019). Application of the Laplace transform to calculate the velocity of a two-phase fluid modulated by the movement of cuttings of an energy willow (*Salix Viminalis*). *Teka. Quarterly journal of agri-food industry*. 2. 71–78.

32. Lavrentev, M. A. (1958). *Metodyi teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow : Izdatelstvo fiziko-matematicheskoy lit.

33. Bogolyubov, N. N. (1974). *Asimptoticheskie metodyi v teorii nelineynyih kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow : Nauka.

*Received 03/11/2021*

*Revision 05/12/2021 Accepted 06/28/2021*